平成２５年度
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験
博士前期課程　数理情報科学専攻
数学

平成２５年２月１３日（水）　１３：００～１６：００

注意

1. 配布物は，問題冊子（Ａ４，３枚），解答用紙（Ｂ４，４枚），草案用紙（Ｂ４，４枚）である．

2. 試験開始の合図があるまで，問題冊子を開いてはならない．

3. 出題数は $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の４題で，４題とも解答せよ．

4. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号を記入せよ．

5. 解答用紙が不足する場合には，裏面を使用してもよい．

6. 問題冊子と草案要旨は持ち帰ること．

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ.

(1) 次の行列式を計算せよ：

$$\det\begin{pmatrix}4&0&0&2\\0&3&0&0\\0&0&5&0\\7&0&0&3\end{pmatrix}.$$

(2) n 次正方行列について，成分がすべて 0 以上の実数で，どの列に関してもその列に属する成分の和が 1 に等しいとき，この行列を n 次の確率行列という．A, B が n 次の確率行列のとき，それらの積 AB も n 次の確率行列となることを示せ.

(3) 次の行列 A に対して，$P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P をひとつあげよ：

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}.$$

$\boxed{2}$ 次の各問に答えよ.

(1) V を内積の定義された有限次元の実ベクトル空間とする．$\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n$ が V の正規直交基底のとき，任意の $\vec{v}\in V$ はこれらの一次結合で

$$\vec{v}=(\vec{v},\vec{v}_1)\vec{v}_1+\cdots+(\vec{v},\vec{v}_n)\vec{v}_n$$

と表される．このことを示せ.

(2) V を実ベクトル空間とする.

(i) $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\in V$ が一次独立であるとはどういう意味か．一次独立の概念の定義を述べよ.

(ii) (i) で述べた定義に即して次を示せ.

『$\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\in V$ は一次独立であるが V の基底ではないとする．このとき $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n,\vec{v}_{n+1}$ が一次独立になるような $\vec{v}_{n+1}\in V$ が存在する.』

$\boxed{3}$ $D=\left\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1\right\}$ のとき，次の各問に答えよ．ただし，a,b は正の定数である．

(1) $E=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \,|\, x^2+y^2\leqq 1\}$ のとき

$$\iint_E (x^2+y^2)\;dxdy$$

を求めよ．

(2) $E=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \,|\, x^2+y^2\leqq 1\}$ のとき $\displaystyle\iint_E x^2\;dxdy=\iint_E y^2\;dxdy$ を示せ．

(3) (2) を利用して，次の積分を計算せよ：

$$K=\iint_D (x^2+y^2)\;dxdy.$$

(4) 定数 a,b は $a^2+b^2=1$ をみたすと仮定する．このとき，$K=\dfrac{\sqrt{3}}{16}\pi$ を満たす定数 a,b を求めよ．

$\boxed{4}$ 関数 $f(x,y)$ を次で定義する：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)),\\[2ex] 0 & ((x,y)=(0,0)).\end{cases}$$

このとき，次の各問に答えよ．

(1) $f(x,y)$ は原点 $(0,0)$ で連続であるかどうか，判定せよ．

(2) $f(x,y)$ は原点で偏微分可能であることを示し，偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ を求めよ．

(3) 偏導関数 $f_x(x,y)$ と $f_y(x,y)$ は原点で連続であるかどうか，判定せよ．