

平成24年度  
鹿児島大学大学院理工学研究科入学試験  
博士前期課程 数理情報科学専攻  
数学

平成23年8月23日(火) 13:00~16:00

注意

1. 配布物は、問題冊子(A4, 3枚)、解答用紙(B4, 4枚)、草案用紙(B4, 4枚)である。
2. 試験開始の合図があるまで、問題冊子を開いてはならない。
3. 出題数は 、、、 の4題で、4題とも解答せよ。
4. 試験開始後、すべての解答用紙に受験番号を記入せよ。
5. 解答用紙が不足する場合には、裏面を使用してもよい。
6. 問題冊子と草案要旨は持ち帰ること。

1 3次元実数ベクトル空間  $\mathbb{R}^3$  の一次変換  $f$  を次で定義する.

$$f: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3x - y + z \\ x - 2z \\ y - 7z \end{pmatrix}$$

このとき、次の各問いに答えよ.

(1)  $f$  の基底  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  に関する表現行列を求めよ.

(2)  $f$  の核  $\ker(f) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = 0\}$  を求めよ.

(3)  $f$  の像  $\text{im}(f) = \{f(v) \mid v \in \mathbb{R}^3\}$  の次元を求め、その基底を一つ定めよ.

2 行列  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  について、次の各問いに答えよ.

(1) 行列  $A$  の固有値を求めよ.

(2) (1) で求めたそれぞれの固有値に対する固有空間の基底を求めよ.

(3)  $A$  を直交行列を用いて対角化せよ.

3 以下の各問いに答えよ.

(1) 変数変換  $x = 1/y$  を用いることにより, 任意の  $R > 1$  に対して次が成立することを示せ.

$$\int_1^R \frac{\log x}{1+x^2} dx = - \int_{1/R}^1 \frac{\log y}{1+y^2} dy.$$

(2)  $x = e^{2t}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  とおくことにより, 次を確かめよ.

$$\lim_{x \downarrow 0} x^{1/2} \log x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1/2} \log x = 0.$$

(3)  $\frac{\log x}{1+x^2}$  は  $(0, 1]$  および  $[1, \infty)$  で広義積分可能であることを示せ.

(4) 次の広義積分の値を求めよ.

$$\int_0^{\infty} \frac{\log x}{1+x^2} dx.$$

4 平面上の閉領域  $D$  を

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y \leq 2x, 1 \leq xy \leq 2\}$$

と定義する. 以下の各問いに答えよ.

(1)  $D$  を図示せよ.

(2) 積分変数の変換  $(u, v) = \left(\frac{y}{x}, xy\right)$  を用いて  $D$  の面積を求めよ.