

平成22年度入学大学院入学試験問題
数学

2010年2月15日(13時~16時)

1

(1) 次の行列の逆行列を計算せよ.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) $A^k = O$ となるような自然数 k が存在するような複素正方行列 A を冪零 (べきれい) 行列という. 以下の事実を証明せよ.

(i) λ が複素正方行列 X の固有値であるとき, λ^2 は X^2 の固有値である.

(ii) A が冪零行列のとき, A の固有値は 0 のみである.

(iii) 零行列以外の冪零行列は対角化不可能である.

2 V を実数体上の有限次元の内積空間 (計量ベクトル空間) とする. このとき V の任意の部分空間 V_1, V_2 に対して次が成立することを示そう.

$$(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp.$$

ただし V の部分集合 U に対して, U^\perp を次のように定める.

$$U^\perp = \{v \in V \mid \text{任意の } u \in U \text{ に対して } (v, u) = 0\}.$$

ここで $(,)$ は V の内積である.

また $V_1 + V_2$ は次のように定める.

$$V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}.$$

(1) V の部分集合 U に対して, U^\perp は V の部分空間になる. このことを示せ.

(2) $(V_1 + V_2)^\perp \subset V_1^\perp \cap V_2^\perp$ となることを示せ.

(3) $(V_1 + V_2)^\perp \supset V_1^\perp \cap V_2^\perp$ となることを示せ.

3

(1) 次の極限値を求めなさい.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \sin^3 x - 1}{x^2}.$$

(2) 次の関数の極値を求めなさい.

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + xy^2 - \frac{1}{2}y^2.$$

4

(1) 次の定積分を計算しなさい.

$$\int_1^2 (\log x)^2 dx.$$

(2) 次の重積分を計算しなさい.

$$\iint_D 2xy \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 1| + y \leq 1, y \geq 0\}.$$