

# 二項関係について

古澤 仁 (鹿児島大学理学部)

平成 20 年 6 月 18 日

## 1 はじめに

皆さんご存知の二項関係ですが、特に頻繁に出てくるのは同値関係や順序関係ではないでしょうか？私も学生時代そうでしたが、中学高校時代より慣れ親しんでいる関数にくらべて、二項関係にはなかなか馴染めないという人もいるのではないかと思います。例えば、同値類や、上限、下限といった非常に基本的な概念について、同値関係や順序関係の性質を使っているいるなことが証明されていますが、なかなか思うように理解することができないということがありませんか？この講義では、二項関係の基本的な性質をいくつか選んで紹介します。皆さんが二項関係に親しみを持つためのきっかけにこの講義がなれば良いと思います。

## 2 基本的な定義と性質

まず、二項関係を定義することからはじめます。

**定義 2.1** 集合  $A$  から集合  $B$  への (二項) 関係  $\alpha$  とは、直積集合  $A \times B$  の部分集合であって、 $\alpha: A \rightarrow B$  で表される。

従って、集合  $A$  から集合  $B$  への関係の全体からなる集合  $\text{Rel}(A, B)$  は直積集合  $A \times B$  のべき集合  $\wp(A \times B)$  に等しい。

集合  $A$  から集合  $B$  への空関係  $\emptyset$  を  $0_{AB}$ 、全関係  $A \times B$  を  $\nabla_{AB}$  で表すことにする。関係  $\alpha, \beta: A \rightarrow B$  に対して、 $\alpha$  と  $\beta$  の包含関係を通常の場合ととしての包含関係、すなわち、

$$\alpha \subseteq \beta \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall (a, b) \in A \times B. ((a, b) \in \alpha \Rightarrow (a, b) \in \beta)$$

で定義する。この包含関係に関して、空関係  $0_{AB}$  と全関係  $\nabla_{AB}$  はそれぞれ  $\text{Rel}(A, B)$  の最小関係と最大関係である。

集合  $A$  上の恒等関係  $\text{id}_A: A \rightarrow A$  とは, 直積集合  $A \times A$  の対角集合である. すなわち,

$$\text{id}_A \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, a) \in A \times A \mid a \in A\}$$

1 点集合  $\{*\}$  を固定し, これを  $1$  で表す.  $1$  については  $\text{id}_1 = \nabla_{11}$  が成り立つ.

**定義 2.2** 関係  $\alpha: A \rightarrow B$  と  $\beta: B \rightarrow C$  に対して,  $\alpha$  と  $\beta$  の合成関係  $\alpha\beta: A \rightarrow C$  を

$$\alpha\beta \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B. ((a, b) \in \alpha \text{ かつ } (b, c) \in \beta)\}$$

と定義する.

のように合成を定義すると, 次が成り立つ.

**命題 2.3** 関係  $\alpha, \alpha': A \rightarrow B$ ,  $\beta, \beta': B \rightarrow C$ ,  $\gamma: C \rightarrow D$  に対して

1.  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ ,
2.  $\text{id}_A\alpha = \alpha = \alpha\text{id}_B$ ,
3.  $0_{XA}\alpha = 0_{XB}$ ,  $\alpha 0_{BY} = 0_{AY}$ ,
4.  $\alpha \subseteq \alpha'$  かつ  $\beta \subseteq \beta'$  ならば  $\alpha\beta \subseteq \alpha'\beta'$ ,
5.  $B \neq \emptyset$  ならば  $\nabla_{AB}\nabla_{BC} = \nabla_{AC}$ .

**定義 2.4** 集合  $A$  から集合  $B$  への関係の族  $\{\alpha_\lambda: A \rightarrow B \mid \lambda \in \Lambda\}$  に対して, その和関係  $\cup_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda$  と共通関係  $\cap_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda$  をそれぞれ集合としての和集合と共通集合として

$$\begin{aligned} \cup_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda &\stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in A \times B \mid \exists \lambda \in \Lambda. ((a, b) \in \alpha_\lambda)\} \\ \cap_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda &\stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in A \times B \mid \forall \lambda \in \Lambda. ((a, b) \in \alpha_\lambda)\} \end{aligned}$$

と定義する.

和関係, 共通関係の定義より, 以下が成り立つ.

**命題 2.5** 関係  $\alpha, \beta_\lambda: A \rightarrow B$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) に対して,

1.  $\alpha \cap (\cup_{\lambda \in \Lambda} \beta_\lambda) = \cup_{\lambda \in \Lambda} (\alpha \cap \beta_\lambda)$ ,
2.  $\alpha \cup (\cap_{\lambda \in \Lambda} \beta_\lambda) = \cap_{\lambda \in \Lambda} (\alpha \cup \beta_\lambda)$ .

合成関係, 和関係, 共通関係の定義より, 以下が成り立つ.

**命題 2.6** 関係  $\alpha: A \rightarrow B$ ,  $\beta_\lambda: B \rightarrow C$  ( $\lambda \in \Lambda$ ),  $\gamma: C \rightarrow D$  に対して,

1.  $\alpha(\cup_{\lambda \in \Lambda} \beta_\lambda) = \cup_{\lambda \in \Lambda} (\alpha\beta_\lambda)$  ,  $(\cup_{\lambda \in \Lambda} \beta_\lambda)\gamma = \cup_{\lambda \in \Lambda} (\beta_\lambda\gamma)$  ,
2.  $\alpha(\cap_{\lambda \in \Lambda} \beta_\lambda) \subseteq \cap_{\lambda \in \Lambda} (\alpha\beta_\lambda)$  ,  $(\cap_{\lambda \in \Lambda} \beta_\lambda)\gamma \subseteq \cap_{\lambda \in \Lambda} (\beta_\lambda\gamma)$  .

命題 2.6 をよく見ると , 1 では等号が成り立が成り立つが , 2 では包含関係にあることしか言っていない . 2 で等号が成り立たない例を与えることにする .

例 2.7  $\Lambda = \{1, 2\}$  ,  $A = \{a, b\}$  とするとき ,  $\alpha, \beta_1, \beta_2: A \rightarrow A$  をそれぞれ

$$\alpha = \{(a, a), (a, b)\}, \quad \beta_1 = \{(a, a)\}, \quad \beta_2 = \{(b, a)\}$$

とすると ,

$$\beta_1 \cap \beta_2 = 0_{AA}$$

であり ,

$$\alpha\beta_1 = \{(a, a)\} = \alpha\beta_2$$

であるので ,

$$\begin{aligned} \alpha(\cap_{\lambda \in \Lambda} \beta_\lambda) &= \alpha(\beta_1 \cap \beta_2) = \alpha 0_{AA} = 0_{AA} = \emptyset \\ &\subsetneq \{(a, a)\} = \alpha\beta_1 \cap \alpha\beta_2 = \cap_{\lambda \in \Lambda} (\alpha\beta_\lambda) . \end{aligned}$$

定義 2.8 関係  $\alpha: A \rightarrow B$  に対して , 逆関係  $\alpha^\# : B \rightarrow A$  は

$$\alpha^\# \stackrel{\text{def}}{=} \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in \alpha\}$$

で定義される .

命題 2.9 関係  $\alpha, \alpha', \alpha_\lambda: A \rightarrow B$  ( $\lambda \in \Lambda$ ) ,  $\beta: B \rightarrow C$  に対して ,

1.  $\alpha^{\#\#} = \alpha$  ,
2.  $(\alpha\beta)^\# = \beta^\#\alpha^\#$  ,
3.  $\alpha \subseteq \alpha'$  ならば  $\alpha^\# \subseteq \alpha'^\#$  ,
4.  $(\cup_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda)^\# = \cup_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda^\#$  ,
5.  $(\cap_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda)^\# = \cap_{\lambda \in \Lambda} \alpha_\lambda^\#$  ,
6.  $0_{AB}^\# = 0_{BA}$  ,  $\nabla_{AB}^\# = \nabla_{BA}$  ,  $\text{id}_A^\# = \text{id}_A$  .

が成り立つ .

次に , デデキントの公式と呼ばれる公式を紹介する .

命題 2.10 関係  $\alpha: A \rightarrow B$  ,  $\beta: B \rightarrow C$  ,  $\gamma: A \rightarrow C$  に対して

1.  $\alpha\beta \cap \gamma \subseteq \alpha(\beta \cap \alpha^\#\gamma)$  ,
2.  $\alpha\beta \cap \gamma \subseteq (\alpha \cap \gamma\beta^\#)\beta$  .

### 3 写像

写像の定義を思い出してみよう.

定義 3.1 関係  $\alpha: A \rightarrow B$  は次の性質を持つとき  $A$  から  $B$  への写像と呼ばれ,  $\alpha: A \rightarrow B$  で表される.

$A$  の任意の元  $a$  に対して,  $\{b \in B \mid (a, b) \in \alpha\}$  は  $B$  の唯一つの元からなる集合である.

集合  $A$  から集合  $B$  への写像全体のなす集合を  $\text{Map}(A, B)$  と書く. 定義より明らかに  $\nabla_{A1}$  は写像であり,  $\text{Map}(A, 1) = \{\nabla_{A1}\}$  である.

写像の満たすべき性質は, 次の二つの性質に分解できる.

一価性  $(a, b) \in \alpha$  かつ  $(a, b') \in \alpha$  ならば  $b = b'$

全域性  $\forall a \in A. \exists b \in B. (a, b) \in \alpha$

一価性と全域性は, 合成関係, 逆関係, 関係の間の包含関係を用いると, 集合の元を用いることなく表現することができる.

一価性  $\alpha^\# \alpha \subseteq \text{id}_B$

全域性  $\text{id}_A \subseteq \alpha \alpha^\#$

式で表した一価性と全域性を用いると, 次の性質を式変形によって証明できる.

命題 3.2 写像  $f, h: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$  に対して次が成り立つ.

1. 写像  $f$  と  $g$  の合成  $fg$  は写像である.
2. 写像  $f$  と  $h$  の間に包含関係があれば,  $f$  と  $h$  は等しい.

証明 1.  $fg$  が一価性と全域性を満たすことを示す.

一価性  $(fg)^\#(fg) = g^\# f^\# fg \subseteq g^\# \text{id}_B g = g^\# g \subseteq \text{id}_C$ .

全域性  $\text{id}_A \subseteq f f^\# = f \text{id}_B f^\# \subseteq f g g^\# f^\# = (fg)(fg)^\#$ .

2.  $f \subseteq h$  ならば,  $f^\# \subseteq h^\#$  なので,

$$h = \text{id}_A h \subseteq f f^\# h \subseteq f h^\# h \subseteq f \text{id}_B = f.$$

以上より,  $f \subseteq h$  ならば,  $f = h$ .

命題 3.2 の 2 の証明を良く見ると,  $f$  の全域性と  $h$  の一価性を使っていることがわかる. このことから, 次の系が直ちに導かれる.

系 3.3 全域的な関係  $\alpha: A \rightarrow B$  と一価的な関係  $\beta: A \rightarrow B$  の間に  $\alpha \subseteq \beta$  という包含関係があれば,  $\alpha$  と  $\beta$  は共に写像であり,  $\alpha = \beta$  を満たす.

任意の関係は二つの写像を用いて表すことができる. このことを示しているのが次の命題である.

命題 3.4 関係  $\alpha: A \rightarrow B$  に対して, 写像  $f: R \rightarrow A, g: R \rightarrow B$  で,  $\alpha = f^\#g, ff^\# \cap gg^\# = \text{id}_R$  を満たすものが存在する.

証明  $R = \alpha, ((a, b), a') \in f \iff a = a', ((a, b), b') \in g \iff b = b'$  とすると,  $f$  と  $g$  はそれぞれ写像であり,

$$\begin{aligned} & (a, b) \in f^\#g \\ \iff & \exists(a', b') \in \alpha. (a, (a', b')) \in f^\# \text{ かつ } ((a', b'), b) \in g \\ \iff & \exists(a', b') \in \alpha. (a = a' \text{ かつ } b' = b) \\ \iff & (a, b) \in \alpha \end{aligned}$$

なので,  $\alpha = f^\#g$  が示された.  $f, g$  の定義に注意すると,

$$\begin{aligned} & ((a, b), (a', b')) \in ff^\# \cap gg^\# \\ \iff & ((a, b), (a', b')) \in ff^\# \text{ かつ } ((a, b), (a', b')) \in gg^\# \\ \iff & a = a' \text{ かつ } b = b' \\ \iff & (a, b) = (a', b') \\ \iff & ((a, b), (a', b')) \in \text{id}_R \end{aligned}$$

なので,  $ff^\# \cap gg^\# = \text{id}_R$  である.

写像の概念と同様に, 全射, 単射, 全単射といった概念についても合成関係, 逆関係, 関係の間の包含関係を用いて表現することができる.

写像  $f: A \rightarrow B$  が

$$\text{全射である} \iff \text{id}_B \subseteq f^\#f,$$

$$\text{単射である} \iff ff^\# \subseteq \text{id}_A,$$

$$\text{全単射である} \iff \text{id}_B \subseteq f^\#f \text{ かつ } ff^\# \subseteq \text{id}_A.$$

集合と写像の教科書には必ず書いてある次の性質は, 上のような方法で全単射を表現した場合, すぐに分かる.

命題 3.5 写像  $f: A \rightarrow B$  が逆写像を持つための必要十分条件は  $f$  が全単射であることである.

証明  $f$  が逆写像を持つということは  $f^\#$  が写像であることに他ならない.  $f$  が全単射であるとき,  $f^\#$  が写像であることを示す. まず,  $f$  が単射なので

$$(f^\#)^\#f^\# = ff^\# \subseteq \text{id}_A$$

が成り立ち,  $f^\#$  の一価性が示される. 全域性は,  $f$  が全射なので

$$\text{id}_B \subseteq f^\# f = f^\#(f^\#)^\#$$

となることよりわかる. 逆に  $f^\#$  が写像であるとき,  $f^\#$  の一価性より

$$f f^\# = (f^\#)^\# f^\# \subseteq \text{id}_A$$

なので  $f$  は単射であり,  $f^\#$  の全域性より

$$\text{id}_B \subseteq f^\#(f^\#)^\# = f^\# f .$$

なので  $f$  は全射である.

$f$  が全単射であるとき,  $f^\#$  も全単射であることも, 同じようにして示すことができるが, ここでは詳細は省略する.

写像は一般に全射と単射の合成によって表現することができる. 普通に考えると,  $f: A \rightarrow B$  が与えられたとき,  $f$  による  $A$  の像  $f(A) = \{b \in B \mid f(a) = b\}$  をとってきて,  $A$  から  $f(A)$  への実質的には  $f$  と何らかわらない全射  $\hat{f}$  (つまり,  $\hat{f}(a) \stackrel{\text{def}}{=} f(a)$  によって定義される  $\hat{f}$ ) と  $f(A)$  から  $B$  への包含写像  $i$  を考えると, この二つの写像の合成によって  $f = \hat{f}i$  と表現できる.

普通に考えた場合の一つの特徴は自由に集合の元を取り扱ったことである. これから, できるだけ元を取り扱うことなく, 上と同様のことをやってみる.

**命題 3.6** 写像  $f: A \rightarrow B$  に対して,  $m^\# m = f^\# f$  を満たす単射  $m: X \rightarrow B$  が存在する.

**証明** 命題 3.4 より, 関係  $f^\# \nabla_{A1}$  に対して, 写像  $m: X \rightarrow B$  と  $g: X \rightarrow 1$  で,  $f^\# \nabla_{A1} = m^\# g$ ,  $m m^\# \cap g g^\# = \text{id}_X$  を満たすものが存在する. ここで,  $X$  から  $1$  への写像は,  $\nabla_{X1}$  のみしか存在しないことから,  $g = \nabla_{X1}$  である. 従って,

$$m m^\# = m m^\# \cap \nabla_{XX} = m m^\# \cap \nabla_{X1} \nabla_{X1}^\# = m m^\# \cap g g^\# = \text{id}_X$$

より,  $m$  は単射である. さらに,  $f^\# \nabla_{A1} = m^\# \nabla_{X1}$  であることから,

$$f^\# \nabla_{A1} \nabla_{1A} = m^\# \nabla_{X1} \nabla_{1A} \text{ かつ } f^\# \nabla_{A1} \nabla_{1X} = m^\# \nabla_{X1} \nabla_{1X} ,$$

すなわち,

$$f^\# \nabla_{AA} = m^\# \nabla_{XA} \text{ かつ } f^\# \nabla_{AX} = m^\# \nabla_{XX}$$

である. 従って,

$$\begin{aligned} f^\# \nabla_{AA} f &= m^\# \nabla_{XA} f \\ &= m^\# \nabla_{XA} f^\# f \\ &= m^\# (f^\# \nabla_{AX})^\# \\ &= m^\# (m^\# \nabla_{XX})^\# \\ &= m^\# \nabla_{XX} m \end{aligned}$$

が成り立つ．このことと，命題 2.10 (デデキントの公式) を使うと，

$$\begin{aligned} f^\#f &= f^\#f \cap f^\#\nabla_{AA}f \\ &= f^\#f \cap m^\#\nabla_{XX}m \\ &\subseteq \text{id}_B \cap m^\#\nabla_{XX}m \\ &\subseteq m^\#(m \cap \nabla_{XX}m) \\ &= m^\#m \end{aligned}$$

$m^\#m \subseteq f^\#f$  も同様に示すことができる．

この命題 3.6 で与えられる単射  $m: X \rightarrow B$  が上で用いた包含写像  $i$  に対応し， $X$  が  $f(A)$  に対応する． $\hat{f}$  に対応する全射をどうやって構成するかを示しているのが次の命題である．

**命題 3.7** 写像  $f: A \rightarrow B$  と単射  $m: X \rightarrow B$  に対して， $m^\#m = f^\#f$  ならば， $f = gm$  となるような全射  $g: A \rightarrow X$  が唯一つ存在する．

**証明** 関係  $fm^\#: A \rightarrow X$  は

$$\begin{aligned} \text{id}_A &= \text{id}_A \text{id}_A \subseteq ff^\#ff^\# = fm^\#mf^\# = (fm^\#)(fm^\#)^\# \\ (fm^\#)^\#(fm^\#) &= mf^\#fm^\# = mm^\#mm^\# = \text{id}_X \text{id}_X = \text{id}_X \end{aligned}$$

であるので全射である．さらに， $(fm^\#)m = ff^\#f$  が成り立つ．ここで， $f$  の全域性より  $f = \text{id}_A f \subseteq ff^\#f$  となり，一価性から  $ff^\#f \subseteq f \text{id}_A = f$  となるので， $ff^\#f = f$  を得る．よって， $f = (fm^\#)m$  である．よって， $g = fm^\#$  とおけば， $g$  が  $f = gm$  となるような全射であることが確認できた．最後に  $g$  の一意性を示す． $h: A \rightarrow X$  が  $f = hm$  を満たす全射であるとすると， $m$  が単射であることから  $h = h \text{id}_X = h m m^\# = f m^\# = g$ ．

命題 3.7 より，探していた  $\hat{f}$  に対応する全射は  $fm^\#$  であることがわかった．

**定理 3.8** 写像  $f: A \rightarrow B$  に対して， $f = gm$  を満たす全射  $g: A \rightarrow X$  と単射  $m: X \rightarrow B$  が存在する．

## 4 所属関係

集合  $A$  から集合  $B$  への二項関係を我々はしばしば  $A$  から  $\wp(B)$  への関数として取り扱う．このような取り扱いが可能であることを少し丁寧に考えてみることにする．

**定義 4.1** 集合  $A$  の所属関係  $\ni_A: \wp(A) \rightarrow A$  とは，

$$\ni_A \stackrel{\text{def}}{=} \{(S, a) \in \wp(A) \times A \mid a \in S\}$$

で定義される関係である．

補題 4.2 写像  $f, g: A \rightarrow \wp(B)$  に対して,  $f \ni_B = g \ni_B$  ならば  $f = g$ .

証明 任意の  $a \in A$  に対して,  $f(a) = g(a)$  を示せばよい.

$$\begin{aligned} b \in f(a) &\iff \exists S \subseteq B. ((a, S) \in f \text{ かつ } b \in S) \\ &\iff \exists S \subseteq B. ((a, S) \in f \text{ かつ } (S, b) \in \ni_B) \\ &\iff (a, b) \in f \ni_B \\ &\iff (a, b) \in g \ni_B \\ &\iff \exists S \subseteq B. ((a, S) \in g \text{ かつ } (S, b) \in \ni_B) \\ &\iff \exists S \subseteq B. ((a, S) \in g \text{ かつ } b \in S) \\ &\iff b \in g(a). \end{aligned}$$

補題 4.3 関係  $\alpha: A \rightarrow B$  に対して, 写像  $f: A \rightarrow \wp(B)$  で  $\alpha = f \ni_B$  を満たすものが唯一つ存在する.

証明 写像  $f: A \rightarrow \wp(B)$  を

$$(a, S) \in f \iff S = \{b \in B \mid (a, b) \in \alpha\}$$

と定義する. 任意の  $a \in A$  に対して, そのような集合  $S \subseteq B$  が唯一つ定まることは明らかであろう. 次に  $\alpha = f \ni_B$  を示す.

$$\begin{aligned} &(a, b) \in f \ni_B \\ \iff &\exists S \in \wp(B). ((a, S) \in f \text{ かつ } (S, b) \in \ni_B) \\ \iff &\exists S \in \wp(B). ((a, S) \in f \text{ かつ } b \in S) \\ \iff &S = \{b' \in B \mid (a, b') \in \alpha\} \text{ かつ } b \in S \\ \iff &(a, b) \in \alpha. \end{aligned}$$

$f$  の一意性は補題 4.2 より成り立つことがわかる.

逆に写像  $f: A \rightarrow \wp(B)$  に対しては,  $f \ni_B$  を考えるといつも  $A$  から  $B$  への関係を得る. 従って, 次の定理が成り立つ.

定理 4.4  $\text{Rel}(A, B) \cong \text{Map}(A, \wp(B))$

## 5 順序関係, 同値関係

順序関係や同値関係は数学において頻繁に現れる二項関係の例である. これらの定義を復習することにする.

定義 5.1 二項関係  $\rho: A \rightarrow A$  は次の 3 つの条件を満たすとき  $A$  上の順序関係と呼ばれる.

$$\text{反射律 } \forall a \in A. ((a, a) \in \rho)$$



推移律  $(a, b) \in \rho$  かつ  $(b, c) \in \rho \Rightarrow (a, c) \in \rho$

反対称律  $(a, b) \in \rho$  かつ  $(b, a) \in \rho \Rightarrow a = b$

$A$  上の順序関係  $\rho$  で, 線形律  $\forall a, b \in A. ((a, b) \in \rho$  または  $(b, a) \in \rho)$  を満たすものを全 (線形) 順序関係と呼ぶ.

定義 5.2 反射律と推移律を満たす関係  $\rho: A \rightarrow A$  で, 対称律  $(a, b) \in \rho \Rightarrow (b, a) \in \rho$  を満たすものを同値関係と呼ぶ.

上の定義に出てきた "律" は全て  $A$  の元を用いることなく表すことができる. つまり, 関係  $\rho: A \rightarrow A$  が,

反射律を満たす  $\iff \text{id}_A \subseteq \rho$ ,

推移律を満たす  $\iff \rho \rho \subseteq \rho$ ,

反対称律を満たす  $\iff \rho \cap \rho^\# \subseteq \text{id}_A$ ,

線形律を満たす  $\iff \rho \cup \rho^\# = \nabla_{AA}$ ,

対称律を満たす  $\iff \rho^\# \subseteq \rho$ .

以上より,  $A$  上の順序関係や同値関係は,  $A$  の元を用いることなく次のように表現できることがわかる.

$\rho$  が  $A$  上の順序関係  $\iff \text{id}_A \subseteq \rho$  かつ  $\rho \rho \subseteq \rho$  かつ  $\rho \cap \rho^\# \subseteq \text{id}_A$ .

$\rho$  が  $A$  上の全順序関係

$\iff \text{id}_A \subseteq \rho$  かつ  $\rho \rho \subseteq \rho$  かつ  $\rho \cap \rho^\# \subseteq \text{id}_A$  かつ  $\rho \cup \rho^\# = \nabla_{AA}$ .

$\rho$  が  $A$  上の同値関係  $\iff \text{id}_A \subseteq \rho$  かつ  $\rho \rho \subseteq \rho$  かつ  $\rho^\# \subseteq \rho$ .

## 6 同値関係の性質

写像  $f: A \rightarrow B$  に対して, 二項関係  $\{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$  を考えると,

$$\begin{aligned} & f(x) = f(y) \\ \iff & \exists z \in B. ((x, z) \in f \text{ かつ } (y, z) \in f) \\ \iff & \exists z \in B. ((x, z) \in f \text{ かつ } (z, y) \in f^\#) \\ \iff & (x, y) \in f f^\# \end{aligned}$$

なので,  $f f^\#$  に他ならない. この二項関係は同値関係の典型的な例で,  $f$  に付随する同値関係と呼ばれるものであるが, 本当にこれが同値関係になることを確かめるのは容易である.

$f$  の全域性から反射律  $\text{id}_A \subseteq ff^\#$  は直ちに成り立つ.  $f$  の一価性から

$$(ff^\#)(ff^\#) = f(f^\#f)f^\# \subseteq \text{id}_B f^\# = f^\#$$

なので推移律が成り立ち,  $(ff^\#)^\# = f^\#f^\# = f^\#$  より対称律が成り立つ.

以上により, 写像から同値関係を構成する一つの方法が確認できた. 逆に, 同値関係から写像を作る方法を示しているのが次の命題である.

**命題 6.1**  $A$  上の同値関係  $\rho: A \rightarrow A$  に対して  $ff^\# = \rho$  となるような写像  $f: A \rightarrow Y$  が存在する.

**証明** 補題 4.3 より,  $\rho$  に対して,  $\rho = f \ni_A$  となるような写像  $f: A \rightarrow \wp(A)$  が存在する.  $\rho$  の反射律と  $f$  の一価性より

$$ff^\# \subseteq ff^\# \rho = ff^\# f \ni_A \subseteq f \ni_A = \rho$$

命題 3.4 より,  $\rho = u^\#v$  を満たす写像  $u$  と  $v$  が存在する. ここで,

$$\begin{aligned} uf \ni_A &= u\rho && (f \ni_A = \rho \text{ より}) \\ &\subseteq vv^\#u\rho && (v \text{ の全域性より}) \\ &= v\rho^\# \rho && (u^\#v = \rho \text{ より}) \\ &\subseteq v\rho\rho && (\rho \text{ の対称律より}) \\ &\subseteq v\rho && (\rho \text{ の推移律より}) \\ &= vf \ni_A && (f \ni_A = \rho \text{ より}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} vf \ni_A &= v\rho && (f \ni_A = \rho \text{ より}) \\ &\subseteq uu^\#v\rho && (u \text{ の全域性より}) \\ &= v\rho\rho && (u^\#v = \rho \text{ より}) \\ &\subseteq v\rho && (\rho \text{ の推移律より}) \\ &= vf \ni_A && (f \ni_A = \rho \text{ より}) \end{aligned}$$

なので,  $uf \ni_A = vf \ni_A$  が成り立ち, 補題 4.2 より,  $uf = vf$  を得る. 従って,

$$\begin{aligned} \rho &= u^\#v \\ &\subseteq ff^\#u^\#vff^\# && (f \text{ の全域性より}) \\ &= ff^\#u^\#uff^\# && (vf = uf \text{ より}) \\ &\subseteq ff^\#ff^\# && (u \text{ の一価性より}) \\ &\subseteq ff^\# && (f \text{ の一価性より}) \end{aligned}$$

となる. 以上より  $\rho = ff^\#$  が成り立つ.

**命題 6.1** で与えられる写像  $f: A \rightarrow \wp(A)$  は任意の元  $a \in A$  に対して,  $a$  の同値類を定めるような写像である.

命題 6.2 同値関係  $\rho: A \rightarrow A$  と,  $\rho = ff^\sharp$  であるような写像  $f: A \rightarrow \wp(A)$  に対して次が成り立つ.

1.  $a \in f(a)$ .
2.  $(a, b) \in \rho \iff f(a) = f(b)$ .
3.  $f(a) \neq f(b) \Rightarrow f(a) \cap f(b) = \emptyset$ .

証明 1.  $\rho$  の反射律より

$$\begin{aligned} (a, a) \in \rho &\iff (a, a) \in f \ni_A \\ &\iff \exists S \subseteq A. ((a, S) \in f \text{ かつ } (S, a) \in \ni_A) \\ &\iff \exists S \subseteq A. ((a, S) \in f \text{ かつ } a \in S) \\ &\iff a \in f(a) \end{aligned}$$

2. この節の冒頭ですでに示した.

3.  $f(a) \neq f(b) \iff (a, b) \notin \rho$  であることが 2 よりわかる.  $f(a) \cap f(b) \neq \emptyset$  と仮定すると,

$$\begin{aligned} &\exists c \in A. ((a, c) \in f \ni_A \text{ かつ } (b, c) \in f \ni_A) \\ \iff &(a, b) \in (f \ni_A)(f \ni_A)^\sharp \end{aligned}$$

ここで,

$$(f \ni_A)(f \ni_A)^\sharp = \rho\rho^\sharp \subseteq \rho\rho \subseteq \rho$$

なので,  $(a, b) \in \rho$  となる. これは  $f(a) \neq f(b)$  に矛盾する.

同値関係  $\rho: A \rightarrow A$  に対して,  $A$  から  $A$  の  $\rho$  による商集合へ標準的全射と呼ばれる自然な全射が存在することが知られている. この全射は, 普遍代数の世界では, 非常に重要な役割を果たすので, ここで少しふれておく.

命題 6.3  $A$  上の同値関係  $\rho: A \rightarrow A$  に対して  $pp^\sharp = \rho$  となるような全射  $p: A \rightarrow Q$  が存在する.

証明 命題 6.1 より,  $ff^\sharp = \rho$  を満たす写像  $f: A \rightarrow \wp(A)$  が存在する. 定理 3.8 より,  $f: A \rightarrow \wp(A)$  に対して,  $f = pm$  を満たす全射  $p: A \rightarrow Q$  と単射  $m: Q \rightarrow \wp(A)$  が存在する.  $m$  が単射であることに注意すると,  $ff^\sharp = (pm)(pm)^\sharp = pmm^\sharp p^\sharp = pp^\sharp$ .

命題 6.3 で与えられる  $Q$  が  $A$  の  $\rho$  による商集合に対応し, 全射  $p: A \rightarrow Q$  が標準的な全射である.

## 7 おわりに

二項関係について基本的な定義と性質を紹介しました。順序関係については、よりテクニカルな準備が必要でしたので、今回は深入りしませんでした。同値関係については、当たり前によく知られている性質について、普段より少しだけ丁寧に見ることができたのではないかと思います。

さて、少しは二項関係に親しみを感じて貰えたでしょうか？もし、もう少し二項関係で遊んでみたいという方にお勧めなのは文献 [3] です。二項関係について、基本的な内容から計算機科学における応用まで幅広く紹介されています。

この講義で紹介した内容で、特徴的だったのは、ところどころで出てきた、集合の元を用いずに表現し、この表現方法に基づき証明などの議論を進める試みだと思います。このスタイルをとことんまで貫きたいという方には、文献 [1] や文献 [2] がお勧めです。Allegory と呼ばれる圏は、二項関係の性質を上手に抽出して得られる圏ですが、これに関する理論が展開されています。

尚、この資料に書いてある内容は、私が修士 1 年のときに九州大学の河原康雄先生のご指導の下で勉強した内容のほんの一部です。河原先生の講義ノート等を基に、関係の理論と圏論について、当時の研究室メンバーで分担して冊子にまとめたものが、私の研究室にあります。コピーして差し上げますので、興味がありましたら連絡下さい。

## 参考文献

- [1] P.J. Freyd and A. Scedrov, Categories, Allegories (North-Holland, 1990).
- [2] P.T. Johnstone, Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium, Vol.1 (Oxford University Press, 2002).
- [3] G. Schmidt and T. Ströhlein, Relations and Graphs (Springer-Verlag, 1993).