二項関係入門（2012 年 8 月改訂* ）

古澤 仁（鹿児島大学）

概 要

この講義では，まず二項関係についていろいろな見方ができることを学ぶ．その後，いろいろな見方の中でも特に行列としての見方に重点をおくことによって二項関係に慣れ親しむ．

1 二項関係のいろいろな見方

まず，二項関係を定義することからはじめる．

定義 1.1. 集合 V 上の直積集合 $V \times V$ の部分集合を V 上の**（二項）関係**と呼ぶ．$(x, y) \in R$ であれば，そのときに限り x と y は R で関係していると言う．[1]

関係は特別な形をした集合に過ぎない．例えば，$\mathbf{R}$ を実数全体のなす集合とするとき，集合 $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ は $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ の部分集合なので，$\mathbf{R}$ 上の関係である．この関係を図示すると図 1 の格子部分であることが容易に理解できるであろう．次に図 2 を眺めてみると，これは関数 $y = x$

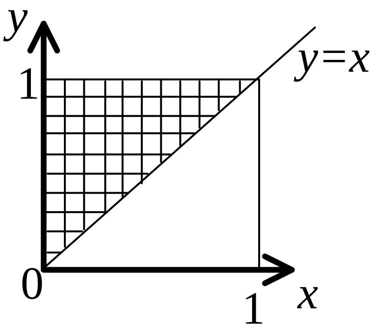

図 1: $0 \leq x \leq y \leq 1$

*今回の改訂に際し，多くの有益な助言を下さった河原康雄先生（九州大学名誉教授）に感謝いたします．

[1]一般に，集合 A と B の直積 $A \times B$ の部分集合を A から B への二項関係という．この講義では，数学を学ぶ上で特に重要な同値関係や順序関係に慣れ親しむことを主な目的とするので，簡単のために 1 つの集合上の関係のみを取り扱うことにした．

を図示したものであり，$y = x$ を表す直線は，$y = x$ を満たす実数の組の集合 $\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = x\}$ を描いたものである．これもまた，$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ の部

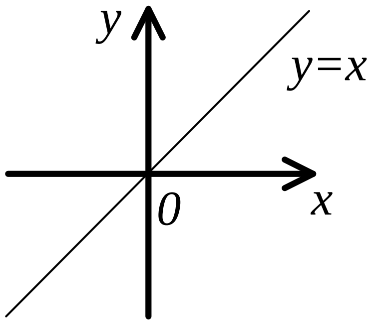

図 2: $y = x$

分集合なので，$\mathbf{R}$ 上の関係である．一般に関数（写像）は関係の特別な場合である．

有限集合上の関係は表や行列，集合値関数などで表現することができる．

例 1.2. 例えば，自然数の集合 $N_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の「3 を法として合同」という関係 $\equiv_{(\mathsf{mod}\,3)}$ は，「1 以上 5 以下の自然数で，3 で割ったときの余が同じもの同士の組を全て集めたもの」なので，

$$\equiv_{(\mathsf{mod}\,3)} = \{(1,1), (1,4), (2,2), (2,5), (3,3), (4,4), (4,1), (5,5), (5,2)\}$$

である．これを表にすると

	1	2	3	4	5
1	○			○	
2		○			○
3			○		
4	○			○	
5		○			○

0-1 行列で表すと

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

集合値関数としてみた場合の対応として表すと

$$\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & \{1,4\} \\ 2 & \mapsto & \{2,5\} \\ 3 & \mapsto & \{3\} \\ 4 & \mapsto & \{1,4\} \\ 5 & \mapsto & \{2,5\} \end{array}$$

となる．

一般に，有限集合 V 上の関係 R を，前に述べたような表に変換するには，V の元を縦軸と横軸に並べ，縦軸と横軸の交差する箇所に，R で関係していれば○を付け，関係していなければ空欄のままにしておけば良い．関係と行列の間には，

$$R_{xy} = 1 \iff (x,y) \in R$$

という関係がある．ここで，R_{xy} は行列 R の第 x 行第 y 列にある成分を表す．関係と対応の間には

$$x \mapsto X \iff X = \{y \mid (x,y) \in R\}$$

という関係がある．

2　二項関係の集合演算

関係は集合であるので，和集合，共通集合，補集合，包含関係を考えることができる．これらが，どのような定義であったか復習しよう．それぞれは，集合 V 上の二項関係 R, S と二項関係の集合 $\mathcal{S}$ に対して次のように定められる．

$$\begin{array}{lrcl} \text{和集合} & R \cup S & = & \{(x,y) \mid (x,y) \in R \text{ または } (x,y) \in S\} \\ & \bigcup \mathcal{S} & = & \{(x,y) \mid \exists R \in \mathcal{S}.((x,y) \in R)\} \\ \text{共通集合} & R \cap S & = & \{(x,y) \mid (x,y) \in R \text{ かつ } (x,y) \in S\} \\ & \bigcap \mathcal{S} & = & \{(x,y) \mid \forall R \in \mathcal{S}.((x,y) \in R)\} \\ \text{補集合} & R^{\mathsf{C}} & = & \{(x,y) \mid (x,y) \notin R\} \\ \text{包含関係} & R \subseteq S & \iff & \forall x,y \in V.((x,y) \in R \implies (x,y) \in S) \end{array}$$

V が有限集合の場合，関係が 0-1 行列として表現できることは前に述べた．和集合，共通集合，補集合，包含関係は，行列の言葉で書くと次のようになる．

$$\begin{array}{lrclcrcl} \text{和集合} & (R \cup S)_{ij} & = & R_{ij} + S_{ij} & , & (\bigcup \mathcal{S})_{ij} & = & \sum_{R \in \mathcal{S}} R_{ij} \\ \text{共通集合} & (R \cap S)_{ij} & = & R_{ij} \cdot S_{ij} & , & (\bigcap \mathcal{S})_{ij} & = & \prod_{R \in \mathcal{S}} R_{ij} \\ \text{補集合} & (R^{\mathsf{C}})_{ij} & = & \neg R_{ij} & & & & \\ \text{包含関係} & R \subseteq S & \iff & \forall i,j.(R_{ij} \leq S_{ij}) & & & & \end{array}$$

ここで，$\sum$ は総和を，$\prod$ は総積をそれぞれ表し，$\{0,1\}$ 上の演算は $+$，$\cdot$，$\neg$ はそれぞれ次のように定義されるものとする．

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \neg 0 & = & 1 \\ \neg 1 & = & 0 \end{array}$$

例えば，集合 $\{x,y,z\}$ 上の関係

$$R = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \quad S = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

に対して，

$$R \cup S = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \ R \cap S = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}, \ R^{\mathsf{C}} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

となる．

3 逆関係

関数 $y = x^2$ は，ご存知のとおり，全射でもなく，単射でもない．なので，逆関数は存在しない．関係は関数と異なり，いつでも逆関係が考えられる．

定義 3.1. 集合 V 上の関係 R に対して

$$R^{\mathsf{T}} = \{(x,y) \mid (y,x) \in R\}$$

を R の**逆関係**と呼ぶ．

もう一度，関数 $y = x^2$ に戻って，逆関係について考察してみよう．これを満たす x と y の組を全て集めた集合

$$R = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = x^2\}$$

を考える．R の逆関係は，定義により

$$R^{\mathsf{T}} = \{(y,x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = x^2\}$$

である．R^{T} を対応として表現すると

$$\begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & \{0\} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \mapsto & \{-1, 1\} \\ \vdots & & \vdots \\ 2 & \mapsto & \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

となる．こうして眺めると，R^{T} は，y に対して関数 $y = x^2$ による逆像を対応させていることが分かるであろう．図 3 は R と R^{T} をグラフとして図示したものである．

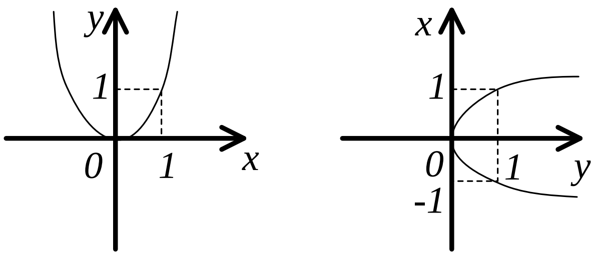

図 3: $y = x^2$ とその逆関係

R が行列として表現できる場合を考えると，逆関係をより身近に感じるかもしれない．

$$(R^{\mathsf{T}})_{ij} = R_{ji}$$

であるので，R^{T} が R の転置行列に他ならないことが分かるだろう．

4　関係の合成

関係の合成は，関数（写像）の合成の拡張である．

定義 4.1. 集合 V 上の関係 R と S の**合成** RS は次のように定義される．

$$RS = \{(x, z) \in V \times V \mid \exists y \in V.((x, y) \in R \text{ かつ } (y, z) \in S)\} \ .$$

集合 $\{x, y, z\}$ 上の 2 つの関係

$$R = \{(x, x), (x, y)\} \ , \qquad S = \{(x, x), (y, z), (z, x)\}$$

について考えてみる．これら 2 つを図にして並べてみたものが図 4 であるが，図の中央の 2 列の同じ文字を同一視して，左端から右端まで道があるような

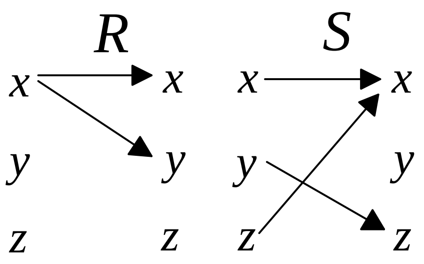

図 4: R と S

元の組が RS の元である．定義にある “$\exists y \in V$” は，中継ぎが存在することを要求している．例えば，左端にある x から右端の z へ至る道があり，その中継ぎは真ん中の列の y である．よって，$(x,z) \in RS$ である．このようにして考えると，

$$RS = \{(x,x),(x,z)\}$$

となる．同じ例を，図に頼らず，もう少し，数学的に考えてみよう．

$$\exists i \in V.((x,i) \in R \text{ かつ } (i,z) \in S)$$

は，この例の場合，

$$\begin{aligned} & ((x,x) \in R \text{ かつ } (x,z) \in S) \\ \text{または} \quad & ((x,y) \in R \text{ かつ } (y,z) \in S) \\ \text{または} \quad & ((x,z) \in R \text{ かつ } (z,z) \in S) \end{aligned} \tag{1}$$

と同じことである．1 行目と 3 行目は正しくないが，2 行目が正しいので，全体としてこの記述は正しいということになり，$(x,z) \in RS$ となる．$(x,x) \in RS$ も同様にして成り立つ．一方，

$$\begin{aligned} & ((x,x) \in R \text{ かつ } (x,y) \in S) \\ \text{または} \quad & ((x,y) \in R \text{ かつ } (y,y) \in S) \\ \text{または} \quad & ((x,z) \in R \text{ かつ } (z,y) \in S) \end{aligned}$$

は，1 行目から 3 行目まで全てが正しくないので，全体としても正しくなく，$(x,y) \notin RS$ であることが確認できる．次に，(1) の記述を行列に関する記述に書き換えると，

$$R_{xx} \cdot S_{xz} + R_{xy} \cdot S_{yz} + R_{xz} \cdot S_{zz}$$

となる．（ここで，“かつ” は “$\cdot$” に，“または” は “$+$” に置き換えた．）これを総和の記号を用いて表すと，

$$\sum_{i \in \{x,y,z\}} R_{xi} \cdot S_{iz}$$

であり，この値が $(RS)_{xz}$ の値に他ならないので，RS は行列の積であることが分かる．R と S および RS を表す行列はそれぞれ

$$R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} , \quad S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} , \quad RS = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

となる．念のため，R と S をかけたものが RS と等しくなるか計算してみて欲しい．

5 写像

写像は特別な関係であるが，どのように特別だったかを思い出してみよう．V 上の関係 R が次の 2 つの条件を満たすときに R は V から V への写像と呼ばれていた．

全域性　$\forall x \in V.\exists y \in V.(x, y) \in R$
一価性　$\forall x, y, z \in V(((x, y) \in R \text{ かつ } (x, z) \in R) \implies y = z)$

写像は，行列で表現するとどのような特徴を持つのだろうか？

$$R_{xy} = 1 \iff (x, y) \in R$$

であることを思い出すと，全域性と一価性はそれぞれ

$$\forall x \in V.\exists y \in V.R_{xy} = 1$$
$$\forall x, y, z \in V((R_{xy} = 1 \text{ かつ } R_{xz} = 1) \implies y = z)$$

と同値である．$R_{xy} = 1$ が，第 x 行第 y 列にある成分が 1 であることを表わすので，

全域性　各行に少なくとも 1 つ 1 がある
一価性　各行に高々 1 つ 1 がある

と言うことになる．この両方を満たすのが写像であるから，写像を表わす行列の特徴は,「各行に 1 つずつ 1 があるような行列」ということになる．例えば，集合 $\{x, y, z\}$ 上の関係

$$R = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} , \quad S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$T = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad , \quad U = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 0 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 & 1 \\ z & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

を考えると,

- R は写像,
- S は全域性を満たすが一価性を満たさないので写像ではない,
- T は一価性を満たすが全域性を満たさないので写像ではない,
- U は一価性も全域性も満たさないので写像ではない

ということになる.

写像には全射や単射といった概念があった．二項関係についても，全射性や単射性は定義できる.

全射性　$\forall y \in V. \exists x \in V. (x, y) \in R$
単射性　$\forall x, y, z \in V(((y, x) \in R$ かつ $(z, x) \in R) \implies y = z)$

全域性や一価性の場合と同様に考えると，全射性や単射性の条件は，行列の特徴としては

全射性　各列に少なくとも 1 つ 1 がある
単射性　各列に高々 1 つ 1 がある

と言うことになる．よって，全射的かつ単射的関係を行列で表現した場合の特徴は「各列に 1 つずつ 1 がある行列」ということになる.

以上をまとめると，所謂通常の全単射は，写像であるので全域性と一価性をみたし，かつ全射性も単射性も満たすような関係であるので，これを行列で表現した場合の特徴は,「各行・各列に 1 つずつ 1 がある行列」ということになる.

6　同値関係

数学を学ぶ上で，最も重要な関係の 1 つが同値関係である．同値関係は次の 3 つの条件を満たす関係であった.

反射律　$\forall x \in V. ((x, x) \in R)$
対称律　$\forall x, y \in V((x, y) \in R \implies (y, x) \in R)$
推移律　$\forall x, y, z \in V. (((x, y) \in R$ かつ $(y, z) \in R) \implies (x, z) \in R)$

同値関係は行列として表すとどのような特徴を持つのだろうか？再び,

$$R_{xy} = 1 \iff (x, y) \in R$$

であることを思い出すと，

$$\forall x \in V.(x,x) \in R \iff \forall x \in V.R_{xx} = 1$$

なので，行列として表現された場合，

反射律　対角成分が全て 1 である

ことがすぐにわかる．また，

$$(v,z) \in R^{\mathsf{T}} \iff (z,v) \in R$$

なので，

$$\begin{aligned} & \forall x,y \in V.((x,y) \in R \implies (y,x) \in R) \\ \iff & \forall x,y \in V.((x,y) \in R \implies (x,y) \in R^{\mathsf{T}}) \\ \iff & R \subseteq R^{\mathsf{T}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall x,y \in V.((x,y) \in R \implies (y,x) \in R) \\ \iff & \forall x,y \in V.((y,x) \in R^{\mathsf{T}} \implies (y,x) \in R) \\ \iff & R^{T} \subseteq R \end{aligned}$$

となり，

$$\forall x,y \in V.(R_{xy} = (R^{\mathsf{T}})_{xy})$$

を得る．要するに，行列の言葉で言うと，

対称律　対称行列である

となる．次に，推移律について考察してみよう．

$$\begin{aligned} & \forall x,y,z \in V.(((x,y) \in R \text{ かつ } (y,z) \in R) \implies (x,z) \in R) \\ \iff & \forall x,y,z \in V.(((x,y) \notin R \text{ または } (y,z) \notin R) \text{ または } (x,z) \in R) \\ \iff & \forall x,z \in V.((\forall y \in V.((x,y) \notin R \text{ または } (y,z) \notin R)) \text{ または } (x,z) \in R) \\ \iff & \forall x,z \in V.((\exists y \in V.((x,y) \in R \text{ かつ } (y,z) \in R)) \implies (x,z) \in R) \\ \iff & \forall x,z \in V.((x,z) \in RR \implies (x,z) \in R) \\ \iff & RR \subseteq R \end{aligned}$$

となり，

$$\begin{aligned} & \forall x,z \in V.((RR)_{xz} = 1 \implies R_{xz} = 1) \\ \iff & \forall x,z \in V.((RR)_{xz} \leq R_{xz}) \end{aligned}$$

を得る．つまり，行列の言葉で言うと，

推移律　行列の 2 乗の各成分はもとの行列の各成分以下である

となる．この場合，残念ながら一目でわかるような特徴にはなっていない．別の角度から推移律を眺めてみよう．

$$
\begin{aligned}
& \forall x,y,z \in V.(((x,y) \in R \text{ かつ } (y,z) \in R) \implies (x,z) \in R) \\
\iff & \forall x,y,z \in V.(((x,y) \notin R \text{ または } (y,z) \notin R) \text{ または } (x,z) \in R) \\
\iff & \forall x,y,z \in V.((x,y) \notin R \text{ または } ((y,z) \notin R \text{ または } (x,z) \in R)) \\
\iff & \forall x,y,z \in V.((x,y) \notin R \text{ または } ((y,z) \in R \implies (x,z) \in R)) \\
\iff & \forall x,y \in V.((x,y) \notin R \text{ または } \forall z \in V.((y,z) \in R \implies (x,z) \in R)) \\
\iff & \forall x,y \in V.((x,y) \in R \implies \forall z \in V.((y,z) \in R \implies (x,z) \in R))
\end{aligned}
$$

となり，

$$
\begin{aligned}
& \forall x,y \in V.(R_{xy} = 1 \implies \forall z \in V.(R_{yz} = 1 \implies R_{xz} = 1)) \\
\iff & \forall x,y \in V.(R_{xy} = 1 \implies \forall z \in V.(R_{yz} \leq R_{xz}))
\end{aligned}
$$

を得る．これを行列の言葉で言うと，

推移律	第 x 行第 y 列の成分が 1 ならば 第 y 行の各成分は第 x 行の各成分以下である

となる．これならば，行列の積を計算することなく，見た目で判断できそうである．以上 3 つの条件をあたまにおいて，集合 $\{x,y,z\}$ 上の関係

$$
R = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 1 & 1 & 1 \\ y & 1 & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 & 1 \end{array}, \quad
S = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0 & 1 \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & 1 & 0 & 1 \end{array}
$$

$$
T = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 1 & 0 & 1 \\ y & 0 & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 & 1 \end{array}, \quad
U = \begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 1 & 1 & 0 \\ y & 1 & 1 & 1 \\ z & 0 & 1 & 1 \end{array}
$$

を考えると，4 つとも反射的かつ対称的であることは一目でお分かりだろう．このうち，R と S は推移律も満たすので同値関係であるが T と U は推移的でない．

集合 V 上の同値関係 R が与えられたとき，我々はしばしば，同値類というものを考える．V の元 x を**代表元**とする**同値類** $[x]_R$ は，

$$[x]_R = \{y \in V \mid (x,y) \in R\}$$

によって定義される V の部分集合であった．

集合 V を V 上の同値関係 R を用いて同値類に分割することを V の R による**類別**または**分類**という．同値類全体のなす集合

$$V/R = \{[x]_R \mid x \in V\}$$

を V の R による**商集合**という．

例 1.2 で考えた 1 から 5 までの自然数の集合 N_5 上の関係 $\equiv_{(\mathsf{mod}\,3)}$ は同値関係であり，

$$N_5/\equiv_{(\mathsf{mod}\,3)}=\{\{1,4\},\{2,5\},\{3\}\}$$

である．実は，$\equiv_{(\mathsf{mod}\,3)}$ を表す行列の行と行および列と列の入れ替えを上手に行うと次のような行列を得る．

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{matrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{array}$$

この行列は，$\equiv_{(\mathsf{mod}\,3)}$ という同値関係によって与えられる分割の様子をよく表している．

7　半順序関係

半順序関係は同値関係とならんで重要な二項関係の 1 つである．半順序関係は，反射的，推移的かつ反対称的な二項関係でる．反対称律とは，次のような条件であった．

反対称律　$\forall x,y\in V.(((x,y)\in R$ かつ $(y,x)\in R)\implies x=y)$

反対称的な関係を行列であらわすと，どのような特徴を持つのか？

$$R_{xy}=1\iff(x,y)\in R,\qquad(R^{\mathsf{T}})_{xy}=R_{yx}$$

だったので，反対称律は

$$\forall x,y\in V.(R_{xy}\cdot(R^{\mathsf{T}})_{xy}=1\implies x=y)$$

と同値である．これを式を使わずに書くと

反対称律　　行列とその転置に共通して 1 である成分は対角成分のみである

となる．

半順序の典型的な例として挙げられるのが包含関係 $\subseteq$ である．集合 $\{a,b\}$ の全ての部分集合を集めた集合 $\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ の上の $\subseteq$ と $\subsetneq$ を行列で

表すと次のようになる．

$$\begin{array}{c} \\ \emptyset \\ \{a\} \\ \{b\} \\ \{a,b\} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \emptyset & \{a\} & \{b\} & \{a,b\} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \subseteq \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \emptyset & \{a\} & \{b\} & \{a,b\} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \subsetneq \end{array}$$

$\subseteq$ は半順序関係であるが，$\subsetneq$ は反射律を満たさないので半順序関係ではない．さらに，集合 $\{x, y, z\}$ 上の関係

$$R = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad S = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$T = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}, \quad U = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

を考えると，全て反射的かつ反対称的であることは見ただけで分かるだろう．R と S は推移律を満たし，よって半順序関係になるが，T と U は推移的でないことを確認できるはずである．

8　関係の不等式

以下，V 上の関係 I を $I = \{(x, y) \in V \times V \mid x = y\}$ と定める．I は行列の言葉で言うと単位行列である．

これまで，全域性からはじまり，反対称律まで論理式で書かれた条件を行列の言葉に言いかえる試みを紹介してきた．論理式で書かれた条件と行列の言葉で言い換えたものに共通しているのは，関係の元に着目するということであろう．ここでは，いちいち元を意識しなくてもこれらの条件をかくことができることを確認する．

まずは，第 5 節で出てきた全域性，一価性，全射性，単射性といった条件から考えてみよう．全域性は

$$\forall x \in V. \exists y \in V. (x, y) \in R$$

であった．

$$(x, y) \in R \iff (y, x) \in R^{\mathsf{T}}$$

なので，全域性と

$$\forall x \in V. \exists y \in V. ((x, y) \in R \text{ かつ } (y, x) \in R^{\mathsf{T}})$$

は同値である．ここで，合成の定義を思い出すと，この条件は

$$\forall x \in V. (x, x) \in RR^{\mathsf{T}}$$

と同値であり，さらに

$$(x, x) \in RR^{\mathsf{T}} \iff ((x, y) \in I \implies (x, y) \in RR^{\mathsf{T}})$$

なので全域性は $I \subseteq RR^{\mathsf{T}}$ と同値である．一価性については，

$$\begin{aligned}
& R \text{ は一価性を満たす} \\
\iff & \forall x, y, z \in V. ((((x, y) \in R \text{ かつ } (x, z) \in R) \implies y = z) \\
\iff & \forall x, y, z \in V. ((((y, x) \in R^{\mathsf{T}} \text{ かつ } (x, z) \in R) \implies y = z) \\
\iff & \forall x, y, z \in V. ((((y, x) \notin R^{\mathsf{T}} \text{ または } (x, z) \notin R) \text{ または } y = z) \\
\iff & \forall y, z \in V. (\forall x \in V. ((y, x) \notin R^{\mathsf{T}} \text{ または } (x, z) \notin R) \text{ または } y = z) \\
\iff & \forall y, z \in V. (\exists x \in V. ((y, x) \in R^{\mathsf{T}} \text{ かつ } (x, z) \in R) \implies y = z) \\
\iff & \forall y, z \in V. ((y, z) \in R^{\mathsf{T}} R \implies y = z) \\
\iff & \forall y, z \in V. ((y, z) \in R^{\mathsf{T}} R \implies (y, z) \in I) \\
\iff & R^{\mathsf{T}} R \subseteq I
\end{aligned}$$

となる．同様にして，

$$\begin{aligned}
R \text{ は全射性を満たす} &\iff I \subseteq R^{\mathsf{T}} R \\
R \text{ は単射性を満たす} &\iff RR^{\mathsf{T}} \subseteq I
\end{aligned}$$

となる．これらについては，各自で証明してみて欲しい．

第 6 節で出てきたのは反射律，対称律，推移律であった．反射律は，定義をよく見ると直ちに

$$R \text{ は反射的} \iff I \subseteq R$$

だとお分かりだろう．

$$\begin{aligned}
R \text{ は対称的} &\iff R^{\mathsf{T}} \subseteq R \\
R \text{ は推移的} &\iff RR \subseteq R
\end{aligned}$$

であることはすでに第 6 節で証明した．

残るは，第 7 節で出てきた反対称律である．これは，

$$\begin{aligned}
& R \text{ は反対称的} \\
\iff & \forall x, y \in V. ((((x, y) \in R \text{ かつ } (y, x) \in R) \implies x = y) \\
\iff & \forall x, y \in V. ((((x, y) \in R \text{ かつ } (x, y) \in R^{\mathsf{T}}) \implies x = y) \\
\iff & \forall x, y \in V. ((((x, y) \in R \cap R^{\mathsf{T}}) \implies x = y) \\
\iff & \forall x, y \in V. ((((x, y) \in R \cap R^{\mathsf{T}}) \implies (x, y) \in I) \\
\iff & R \cap R^{\mathsf{T}} \subseteq I
\end{aligned}$$

となる．

以上，見てきたとおり，ここまでに出てきた条件たちは全て関係の間の包含関係（不等式）として書き直すことができる．この書き替えで嬉しいのは，$\forall$ や $\exists$ が消えてなくなるということではないだろうか．

9 まとめにかえて

今後皆さんは，モノイドや群，環，体，束，ブール代数などの抽象的な代数について学ぶであろう．二項関係をこれらの代数のように取り扱うための体系が知られている．Chin と Tarski によるとされる定義を紹介する．定義の中に知らない言葉がでてくると思うが，どれも後で必ず習うであろうから，ここでは，解説しない．もし興味がある人がいれば，個人的に聞きに来て欲しい．

定義 9.1. [3, Appendix A.2] 空でない集合 $\mathcal{R}$ と二項演算子 $\sqcup, \sqcap, ;$，単項演算子 ${}^{-}, {}^{\mathsf{T}}$，零項演算子 O, L, I の組 $(\mathcal{R}, \sqcup, \sqcap, {}^{-}, ;, {}^{\mathsf{T}}, O, L, I)$ で，以下を満たすものを**関係代数**と呼ぶ．

- $(\mathcal{R}, \sqcup, \sqcap, {}^{-}, O, L)$ は最大元 L と最小元 O を持つ完備かつ原子的なブール代数である．
- $(\mathcal{R}, ;, I)$ はモノイドである．
- Schröder 同値と呼ばれる次の同値関係が成り立つ．
$$\forall Q, R, S \in \mathcal{R}.\ Q; R \subseteq S \iff Q^{\mathsf{T}}; \overline{S} \subseteq \overline{R} \iff \overline{S}; R^{\mathsf{T}} \subseteq \overline{Q}$$
- Tarski 規則と呼ばれる次の含意が成り立つ．
$$\forall R \in \mathcal{R}.\ R \neq O \implies L; R; L = L$$

代数の言葉に慣れたころにもう一度関係について考える機会があったら，関係代数を使って二項関係のいろいろな性質について検証してみて欲しい．

最初に述べたとおり，この講義では 1 つの集合上の関係のみを扱ったが，一般に，関係は 2 つの集合の間に定義される概念である．ここで 2 つの集合は必ずしも同一である必要はない．そのような関係を代数的に取り扱う枠組みとしては，非斉次関係代数 [3] や寓圏 [1, 2] などがある．これらは，定義 9.1 で紹介した関係代数の一般化になっている．これらの代数的枠組みは，二項関係を取り扱うための道具としての役割もさることながら，研究対象としても大変興味深い．

また，関係の理論は，グラフ変換やプログラム意味論･検証論，アルゴリズム解析，データ解析など計算機科学へもさかんに応用されていて，専門家による国際会議 International Conference on Relational and Algebraic Methods in Computer Science がおおよそ 1 年半に 1 度のペースで開催されている．

参考文献

[1] P.J. Freyd and A. Scedrov, *Categories, Allegories*. North-Holland, 1990.

[2] P.T. Johnstone, *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*, Vol.1. Oxford University Press, 2002.

[3] Gunther Schmidt and Thomas Ströhlein. *Relations and Graphs. Discrete Mathematics for Computer Science*. Springer-Verlag, 1993.