二項関係入門

古澤 仁（鹿児島大学理学部）

1　はじめに

Gunther Schmidt 先生と Thomas Ströhlein 先生が書いた本 [1] の最初の方を少しだけ勉強して，二項関係について基本的なことを修得しよう．

2　二項関係の集合演算

まず，二項関係を定義することからはじめる．

定義 2.1. 集合 V 上の直積集合 $V \times V$ の部分集合を **（二項）関係**と呼ぶ．$(x, y) \in R$ であれば，そのときに限り x と y は R で関係していると言う．

関係は特別な形をした集合に過ぎない．例えば，$\mathbf{R}$ を実数全体のなす集合とするとき，集合

$$\{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$$

は $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ の部分集合なので，$\mathbf{R}$ 上の関係である．この関係を図示すると図 1 の格子部分であることが容易に理解できるであろう．次に図 2 を眺めてみ

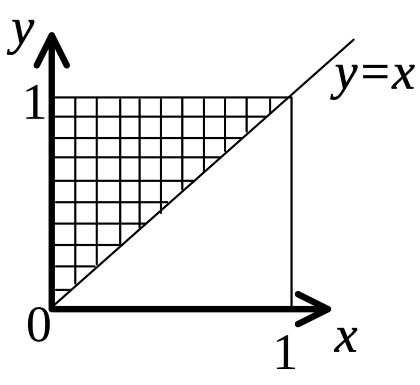

図 1: $0 \leq x \leq y \leq 1$

ると，これは関数 $y = x$ を図示したものであり，$y = x$ を表す直線は，$y = x$

を満たす実数の組の集合

$$\{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = x\}$$

を描いたものである．これもまた，$\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ の部分集合なので，$\mathbf{R}$ 上の関係で

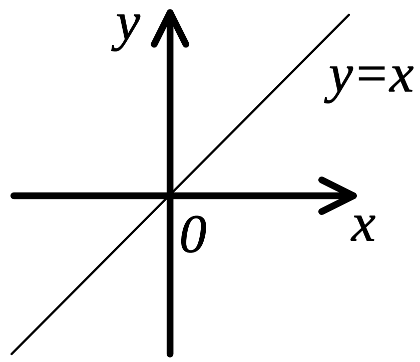

図 2: $y = x$

ある．一般に関数（写像）は関係の特別な場合である．

有限集合上の関係は表や行列，対応などで表現することができる．

例 2.2. 例えば，自然数の集合 $\{1, 2, \cdots, 7\}$ 上の「3 を法として合同」という関係を表にすると

	1	2	3	4	5	6	7
1	○			○			○
2		○			○		
3			○			○	
4	○			○			○
5		○			○		
6			○			○	
7	○			○			○

0-1 行列で表すと

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

対応として表すと

$$\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & \{1,4,7\} \\ 2 & \mapsto & \{2,5\} \\ 3 & \mapsto & \{3,6\} \\ 4 & \mapsto & \{1,4,7\} \\ 5 & \mapsto & \{2,5\} \\ 6 & \mapsto & \{3,6\} \\ 7 & \mapsto & \{1,4,7\} \end{array}$$

となる．

一般に，有限集合 V 上の関係 R を，前に述べたような表に変換するには，V の元を縦軸と横軸に並べ，縦軸と横軸の交差する箇所に，R で関係していれば○を付け，関係していなければ空欄のままにしておけば良い．関係と行列の間には，

$$R_{xy} = 1 \iff (x,y) \in R$$

という関係がある．ここで，R_{xy} は行列 R の第 x 行第 y 列にある成分を表す．関係と対応の間には

$$x \mapsto X \iff X = \{y \mid (x,y) \in R\}$$

という関係がある．

関係は集合であるので，和集合，共通集合，補集合，包含関係を考えることができる．これらが，どのような定義であったか復習しよう．それぞれは，集合 V 上の二項関係 R, S と二項関係の集合 $\mathcal{S}$ に対して次のように定められる．

$$\begin{array}{lrcl} \text{和集合} & R \cup S & = & \{(x,y) \mid (x,y) \in R \text{ または } (x,y) \in S\} \\ & \bigcup \mathcal{S} & = & \{(x,y) \mid \exists R \in \mathcal{S}.((x,y) \in R)\} \\ \text{共通集合} & R \cap S & = & \{(x,y) \mid (x,y) \in R \text{ かつ } (x,y) \in S\} \\ & \bigcap \mathcal{S} & = & \{(x,y) \mid \forall R \in \mathcal{S}.((x,y) \in R)\} \\ \text{補集合} & \overline{R} & = & \{(x,y) \mid (x,y) \notin R\} \\ \text{包含関係} & R \subseteq S & \iff & \forall x,y \in V.((x,y) \in R \implies (x,y) \in S) \end{array}$$

V が有限集合の場合，関係が 0-1 行列として表現できることは前に述べた．和集合，共通集合，補集合，包含関係は，行列の言葉で書くと次のようになる．

$$\begin{array}{lrcl} \text{和集合} & (R \cup S)_{ij} & = & R_{ij} + S_{ij} \ , \quad (\bigcup \mathcal{S})_{ij} \ = \ \sum_{R \in \mathcal{S}} R_{ij} \\ \text{共通集合} & (R \cap S)_{ij} & = & R_{ij} \cdot S_{ij} \ , \quad (\bigcap \mathcal{S})_{ij} \ = \ \prod_{R \in \mathcal{S}} R_{ij} \\ \text{補集合} & (\overline{R})_{ij} & = & \overline{R_{ij}} \\ \text{包含関係} & R \subseteq S & \iff & \forall i,j.(R_{ij} \leq S_{ij}) \end{array}$$

ここで，$\sum$ は総和を，$\prod$ は総積をそれぞれ表し，$\{0,1\}$ 上の演算は $+$，$\cdot$，$^{-}$

はそれぞれ次のように定義されるものとする．

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \overline{0} & = & 1 \\ \overline{1} & = & 0 \end{array}$$

例えば，集合 $\{x, y, z\}$ 上の関係

$$R = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad , \quad S = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

に対して，

$$R \cup S = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad , \quad R \cap S = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\overline{R} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

となる．

空集合や，集合 V の直積は，二項関係の定義により明らかに V 上の関係である．これらをそれぞれ**空関係**，**全関係**と呼び，O と L で表す．例えば，集合 $\{x, y, z\}$ 上の空関係と全関係を表す行列は

$$\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

である．空関係と全関係について，以下の性質が成り立つ．

命題 2.3. R と S を V 上の二項関係とするとき，次の 3 つの式は同値である．

$$R \subseteq S \ , \quad L = \overline{R} \cup S \ , \quad O = R \cap \overline{S} \ .$$

集合 V 上の恒等関係 $\{(x, y) \mid x = y\}$ を I と書くことにする．例えば，集合 $\{x, y, z\}$ 上の恒等関係とその補集合を表す行列はそれぞれ

$$\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

である．

練習問題 1. 命題 *2.3* を全て証明せよ．

3 逆関係

関数 $y = x^2$ は，ご存知のとおり，全射でもなく，単射でもない．なので，逆関数は存在しない．関係は関数と異なり，いつでも逆関係が考えられる．

定義 3.1. 集合 V 上の関係 R に対して

$$R^{\mathsf{T}} = \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

を R の**逆関係**と呼ぶ．

もう一度，関数 $y = x^2$ に戻って，逆関係について考察してみよう．これを満たす x と y の組を全て集めた集合

$$R = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = x^2\}$$

を考える．R の逆関係は，定義により

$$R^{\mathsf{T}} = \{(y, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid y = x^2\}$$

である．R^{T} を対応として表現すると

$$\begin{array}{ccc} 0 & \mapsto & \{0\} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \mapsto & \{-1, 1\} \\ \vdots & & \vdots \\ 2 & \mapsto & \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

となる．こうして眺めると，R^{T} は，y に対して関数 $y = x^2$ による逆像を対応させていることが分かるであろう．図 3 は R と R^{T} をグラフとして図示したものである．

R が行列として表現できる場合を考えると，逆関係をより身近に感じるかもしれない．

$$(R^{\mathsf{T}})_{ij} = R_{ji}$$

であるので，R^{T} が R の転置行列に他ならないことが分かるだろう．

命題 3.2. 集合 V 上の二項関係 R, S と二項関係の集合 $\mathcal{S}$ に対して次が成り

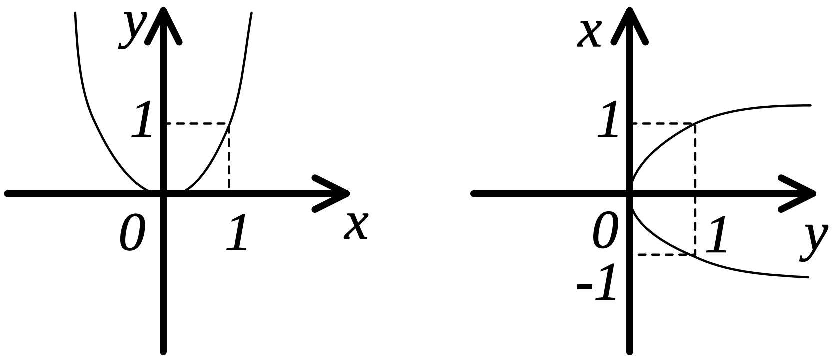

図 3: $y = x^2$ とその逆関係

立つ.

$$
\begin{gathered}
(R^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = R \ , \qquad \overline{R}^{\mathsf{T}} = \overline{R^{\mathsf{T}}} \ , \\
R \subseteq S \iff R^{\mathsf{T}} \subseteq S^{\mathsf{T}} \ , \\
(R \cup S)^{\mathsf{T}} = R^{\mathsf{T}} \cup S^{\mathsf{T}} \ , \qquad (R \cap S)^{\mathsf{T}} = R^{\mathsf{T}} \cap S^{\mathsf{T}} \ , \\
(\bigcup \mathcal{S})^{\mathsf{T}} = \bigcup \{R^{\mathsf{T}} \mid R \in \mathcal{S}\} \ , \qquad (\bigcap \mathcal{S})^{\mathsf{T}} = \bigcap \{R^{\mathsf{T}} \mid R \in \mathcal{S}\} \ , \\
I^{\mathsf{T}} = I \ , \qquad O^{\mathsf{T}} = O \ , \qquad L^{\mathsf{T}} = L \ .
\end{gathered}
$$

練習問題 2. 命題 *3.2* の全てを証明せよ.

4　関係の合成

関係の合成は，関数（写像）の合成の拡張である.

定義 4.1. 集合 V 上の関係 R と S の合成 $R;S$ は次のように定義される.

$$R;S = \{(x,z) \in V \times V \mid \exists y \in V.((x,y) \in R \text{ かつ } (y,z) \in S)\} \ .$$

R と S の間の ; は，混乱が生じない場合は省略されることが多い.

集合 $\{x,y,z\}$ 上の 2 つの関係

$$R = \{(x,x),(x,y)\} \ , \qquad S = \{(x,x),(y,z),(z,x)\}$$

について考えてみる．これら 2 つを図にして並べてみたものが図 4 であるが，図の中央の 2 列の同じ文字を同一視して，左端から右端まで道があるような元の組が $R;S$ の元である．定義にある"$\exists y \in V$"は，中継ぎが存在することを要求している．例えば，左端にある x から右端の z へ至る道があり，その中継ぎは真ん中の列の y である．よって，$(x,z) \in R;S$ である．このようにして考えると，

$$R;S = \{(x,x),(x,z)\}$$

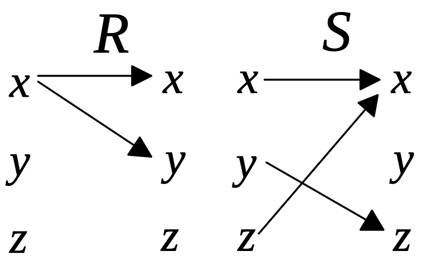

図 4: R と S

となる．同じ例を，図に頼らず，もう少し，数学的に考えてみよう．

$$\exists i \in V.((x,i) \in R \text{ かつ } (i,z) \in S)$$

は，この例の場合，

$$\begin{array}{ll} & ((x,x) \in R \text{ かつ } (x,z) \in S) \\ \text{または} & ((x,y) \in R \text{ かつ } (y,z) \in S) \\ \text{または} & ((x,z) \in R \text{ かつ } (z,z) \in S) \end{array} \tag{1}$$

と同じことである．1 行目と 3 行目は，正しくないが，2 行目が正しいので，全体としてこの記述は正しいということになり，$(x,z) \in R;S$ となる．$(x,x) \in R$ も同様にして成り立つ．一方，

$$\begin{array}{ll} & ((x,x) \in R \text{ かつ } (x,y) \in S) \\ \text{または} & ((x,y) \in R \text{ かつ } (y,y) \in S) \\ \text{または} & ((x,z) \in R \text{ かつ } (z,y) \in S) \end{array}$$

は，1 行目から 3 行目まで全てが正しくないので，全体としても正しくなく，$(x,y) \notin R$ であることが確認できる．次に，(1) の記述を行列に関する記述に書き換えると，

$$R_{xx} \cdot S_{xz} + R_{xy} \cdot S_{yz} + R_{xz} \cdot S_{zz}$$

となる.（ここで，”かつ”は”·”に，”または”は”+”に置き換えた.）これを総和の記号を用いて表すと，

$$\sum_{i \in \{x,y,z\}} R_{xi} \cdot S_{iz}$$

であり，この値が $(R;S)_{xz}$ の値に他ならないので，$R;S$ は行列の積であるこ

とが分かる．R と S および $R;S$ を表す行列はそれぞれ

$$
\begin{array}{cccc}
 & R & S & R;S \\
 & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\
\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\end{array}
$$

であるので，念のため，R と S をかけたものが $R;S$ と等しくなるか計算してみて欲しい．

集合 V が有限の場合，関係の合成は行列の積だと思っていいことが分かったので，次のことは，直感的には直ちに認められるであろう．

命題 4.2. 集合 V 上の任意の関係 Q, R, S および関係の集合 $\mathcal{S}$ に対して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{array}{ll}
(QR)S = Q(RS) & IR = R = RI \\
(RS)^{\mathsf{T}} = S^{\mathsf{T}}R^{\mathsf{T}} & OR = O = RO \\
Q(R \cup S) = QR \cup QS & Q(\bigcup \mathcal{S}) = \bigcup\{QR \mid R \in \mathcal{S}\}
\end{array}
$$

しかし，命題 4.2 は V が有限の場合に限ったものではないので，合成の定義に戻って証明するべきである．

分配律 $Q(R \cup S) = QR$ を使うと合成 ; が包含関係 $\subseteq$ を保存することが直ちに分かる．

命題 4.3. 集合 V 上の任意の関係 Q, R, S に対して

$$
Q \subseteq R \implies SQ \subseteq SR \text{ かつ } QS \subseteq RS \ .
$$

証明. $SQ \subseteq SQ \cup SR = S(Q \cup R) = SR$.

$$
\begin{array}{rcl}
QS & \subseteq & QS \cup RS \\
 & = & ((QS \cup RS)^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \\
 & = & ((QS)^{\mathsf{T}} \cup (RS)^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \\
 & = & (S^{\mathsf{T}}Q^{\mathsf{T}} \cup S^{\mathsf{T}}Q^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \\
 & = & (S^{\mathsf{T}}(Q^{\mathsf{T}} \cup Q^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \\
 & = & (Q \cup R)S \\
 & = & RS
\end{array}
$$

□

命題 4.3 より，次の命題を得る．

命題 4.4. 集合 V 上の任意の関係 Q, R, S および関係の集合 $\mathcal{S}$ に対して

$$Q(R \cap S) \subseteq QR \cap QS \quad Q(\bigcap \mathcal{S}) \subseteq \bigcap \{QR \mid R \in \mathcal{S}\}$$

証明. $R \cap S \subseteq R$ かつ $R \cap S \subseteq S$ なので，命題 4.3 より $Q(R \cap S) \subseteq QR$ かつ $Q(R \cap S) \subseteq QS$ である．従って，$\cap$ の定義より，$Q(R \cap S) \subseteq QR \cap QS$ が成り立つ．$Q(\bigcap \mathcal{S}) \subseteq \bigcap \{QR \mid R \in \mathcal{S}\}$ についても同様. □

次の性質は，Tarski 規則と呼ばれる．

命題 4.5. 空でない任意の関係 R に対して，

$$LRL = L$$

が成り立つ．

この命題を例を用いて確認しよう．

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad LR = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$RL = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad LRL = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

次の規則は Dedekind の式と呼ばれる．少し複雑だが，知っていると便利なことが多い．

命題 4.6. 集合 V 上の任意の関係 Q, R, S に対して

$$QR \cap S \subseteq (Q \cap SR^{\mathsf{T}})(R \cap Q^{\mathsf{T}}S)$$

が成り立つ．

証明. 以下による．

$$\begin{aligned}
& (x, y) \in QR \cap S \\
\iff\ & \exists z \in V.(((x, z) \in Q \text{ かつ } (x, y) \in S \text{ かつ } (y, z) \in R^{\mathsf{T}}) \text{ かつ} \\
& \qquad ((z, y) \in R \text{ かつ } (z, x) \in Q^{\mathsf{T}} \text{ かつ } (x, y) \in S)) \\
\implies\ & \exists z \in V.(((x, z) \in Q \text{ かつ } \exists u.((x, u) \in S \text{ かつ } (u, z) \in R^{\mathsf{T}})) \text{ かつ} \\
& \qquad ((z, y) \in R \text{ かつ } \exists v.((z, v) \in Q^{\mathsf{T}} \text{ かつ } (v, y) \in S))) \\
\iff\ & \exists z \in V.(((x, z) \in Q \text{ かつ } (x, z) \in SR^{\mathsf{T}}) \text{ かつ} \\
& \qquad ((z, y) \in R \text{ かつ } (z, y) \in Q^{\mathsf{T}}S)) \\
\iff\ & \exists z \in V.((x, z) \in Q \cap SR^{\mathsf{T}} \text{ かつ } (z, y) \in R \cap Q^{\mathsf{T}}S) \\
\iff\ & (x, y) \in (Q \cap SR^{\mathsf{T}})(R \cap Q^{\mathsf{T}}S) \ .
\end{aligned}$$

□

合成が $\subseteq$ を保存するので，命題 4.6 より次が直ちに成り立つ．

系 4.7. 集合 V 上の任意の関係 Q, R, S に対して

$$QR \cap S \subseteq Q(R \cap Q^{\mathsf{T}} S) \ , \quad QR \cap S \subseteq (Q \cap SR^{\mathsf{T}})R$$

が成り立つ．

写像は特別な関係であるが，どのように特別だったかを思い出してみよう．V 上の関係 R が次の 2 つの条件を満たすときに R は V から V への写像と呼ばれていた．

全域性 $\forall x \in V. \exists y \in V. (x, y) \in R$
一価性 $\forall x, y, z \in V(((x, y) \in R$ かつ $(x, z) \in R) \implies y = z)$

次の命題は，合成を使って写像であるための条件を簡潔に述べることができることを示している．

命題 4.8. V 上の関係 R について，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} R : \text{全域的} &\iff L = RL \\ R : \text{一価的} &\iff R\overline{I} \subseteq \overline{R} \end{aligned}$$

証明. $L = RL$ と

$$\forall x, z \in V. \exists y \in V. ((x, y) \in R \text{ かつ } (y, z) \in L) \tag{2}$$

は同値であり，V の任意の元 u, v に対して $(u, v) \in L$ なので (2) と全域性は同値となり，$L = RL$ と全域性が同値であることがわかる．

$$\begin{aligned} R\overline{I} \subseteq \overline{R} &\iff R \subseteq \overline{R\overline{I}} \\ &\iff \forall x, y \in V. ((x, y) \in R \implies (x, y) \notin R\overline{I}) \end{aligned}$$

であり，さらに

$$\begin{aligned} (x, y) \notin R\overline{I} &\iff \neg(\exists z. ((x, z) \in R \text{ かつ } (z, y) \in \overline{I})) \\ &\iff \forall z. ((x, z) \notin R \text{ または } y = z) \\ &\iff \forall z. ((x, z) \in R \implies y = z) \end{aligned}$$

なので，$R\overline{I} \subseteq \overline{R}$ と一価性は同値である． □

この他の形でも述べることができる．

命題 4.9. V 上の関係 R について，次が成り立つ．

$$\begin{aligned} L = RL &\iff I \subseteq RR^{\mathsf{T}} \iff \overline{R} \subseteq R\overline{I} \\ R\overline{I} \subseteq \overline{R} &\iff R^{\mathsf{T}}R \subseteq I \end{aligned}$$

証明. $L = RL \iff I \subseteq RR^{\mathsf{T}}$ を示す．$L = RL$ が成り立つとき，系 4.7 を用いると $I = I \cap L = \subseteq I \cap RL \subseteq R(R^{\mathsf{T}} \cap L) = RR^{\mathsf{T}}$．逆に $I \subseteq RR^{\mathsf{T}}$ が成り立つとき，$L = IL \subseteq RR^{\mathsf{T}}L \subseteq RL$．$L = RL \iff \overline{R} \subseteq R\overline{I}$ は,

$$\overline{R} \subseteq R\overline{I} \iff R \cup R\overline{I} = R(I \cup \overline{I}) = RL = L$$

による．$R\overline{I} \subseteq \overline{R} \iff R^{\mathsf{T}}R \subseteq I$ は，$R\overline{I} \cap R = O \iff R^{\mathsf{T}}R \cap \overline{I} = O$ と同値であるのでこれを示す．$R\overline{I} \cap R = O$ が成り立つとき，系 4.7 より，$R^{\mathsf{T}}R \cap \overline{I} \subseteq R^{\mathsf{T}}(R \cap R\overline{I}) \subseteq R(R \cap \overline{R} = RO = O$．逆も系 4.7 を用いて同様に示すことができる．　□

練習問題 3. 次の各問に答えよ．

1. 命題 *4.2*, *4.5* を証明せよ．
2. 集合 V 上の任意の関係 Q, R, S に対して

   $$QR \subseteq S \iff Q^{\mathsf{T}}\overline{S} \subseteq \overline{R} \iff \overline{S}R^{\mathsf{T}} \subseteq \overline{Q}$$

   が成り立つことを示せ.（この規則は *Schröder* 同値と呼ばれる.）
3. $Q(R \cap S) \neq QR \cap QS$ であるような関係 Q, R, S を具体的に挙げよ．
4. $Q(R \cap S) = QR \cap QS$ であるような関係 Q, R, S を具体的に挙げよ．
5. 写像 R が全射であることと写像 R が $L = LR$ を満たすことが同値であることを示せ．
6. 写像 R が単射であることと写像 R が $\overline{I}R \subseteq \overline{R}$ を満たすことが同値であることを示せ．
7. 関係 R が次を満たすことを示せ．

   $$L = LR \iff I \subseteq R^{\mathsf{T}}R \iff \overline{R} \subseteq \overline{I}R$$
   $$RR^{\mathsf{T}} \subseteq I \iff \overline{I}R \subseteq \overline{R}$$

5　順序関係と同値関係

恒等関係 I を使うと，反射性が簡単に表現することができる．まずは，通常の反射性の定義を思い出すことにする．

$$\begin{aligned} R : \text{反射的} &\iff \forall x \in V.((x,x) \in R) \\ R : \text{非反射的} &\iff \forall x \in V.((x,x) \notin R) \end{aligned}$$

同値関係や順序関係は反射的である．反射的な関係および非反射的な関係について，以下が成り立つ．

命題 5.1. R を集合 V 上の関係とする．

$$\begin{array}{lcccc} R\text{ が反射的} & \iff & I \subseteq R & \iff & R \cup I = R \\ R\text{ が非反射的} & \iff & R \subseteq \overline{I} & \iff & R \cap \overline{I} = R \end{array}$$

関係の対称性に関する概念は逆関係を使うと簡単に表現できる．まずは，対称性について，通常どのように定義されていたか思い出してみよう．

$$\begin{array}{lcl} R:\text{対称的} & \iff & \forall x, y \in V((x,y) \in R \implies (y,x) \in R) \\ R:\text{非対称的} & \iff & \forall x, y \in V((x,y) \in R \implies (y,x) \notin R) \\ R:\text{反対称的} & \iff & \forall x, y \in V((x,y) \in R \text{ かつ } (y,x) \in R \implies x = y) \end{array}$$

逆関係を使うと対称性が簡単に表現できることが次の命題から分かるだろう．

命題 5.2. 集合 V 上の関係 R について，以下が成り立つ．

$$\begin{array}{lcccl} R:\text{対称的} & \iff & R^{\mathsf{T}} \subseteq R & \iff & R^{\mathsf{T}} = R \\ R:\text{非対称的} & \iff & R \cap R^{\mathsf{T}} \subseteq O & \iff & R^{\mathsf{T}} \subseteq \overline{R} \\ R:\text{反対称的} & \iff & R \cap R^{\mathsf{T}} \subseteq I & \iff & R^{\mathsf{T}} \subseteq \overline{R} \cup I \end{array}$$

推移律は順序関係と同値関係がともに満たすべき性質である．まず，推移律の定義を思い出すことにする．

$$R:\text{推移的} \iff \begin{array}{r} \forall x, y, z \in V.(((x,y) \in R \text{ かつ } (y,z) \in R) \\ \implies (x,z) \in R) \end{array}$$

推移律も合成を使うと簡潔に表すことができる．

命題 5.3. 集合 V 上の関係 R について次が成り立つ．

$$R:\text{推移的} \iff RR \subseteq R$$

擬順序と同値関係の定義を思い出そう．

$$\begin{array}{rcl} R:\text{擬順序} & \iff & R:\text{反射的かつ推移的} \\ R:\text{同値関係} & \iff & R:\text{反射的かつ推移的かつ対称的} \end{array}$$

命題 5.1，5.2，5.3 よりただちに次が分かる．

命題 5.4. R を集合 V 上の関係とする．

$$\begin{array}{rcl} R:\text{擬順序} & \iff & I \subseteq R \text{ かつ } RR \subseteq R \\ R:\text{同値関係} & \iff & I \subseteq R \text{ かつ } RR \subseteq R \text{ かつ } R^{\mathsf{T}} \subseteq R \end{array}$$

恒等関係 I と全関係 L は

$$\begin{array}{ccc} I \subseteq I\ , & II \subseteq I\ , & I^{\mathsf{T}} \subseteq I\ , \\ I \subseteq L\ , & LL \subseteq L\ , & L^{\mathsf{T}} \subseteq L \end{array}$$

となるのでいずれも同値関係である．念のため $V=\{x,y,z\}$ 上の恒等関係と全関係を 0-1 行列で表してみると上の包含関係が成り立つことがすぐにわかるであろう．

集合 V 上の同値関係 R が与えられたとき，我々はしばしば，同値類というものを考える．V の元 x を**代表元**とする**同値類** $[x]_R$ は，

$$[x]_R = \{y \in V \mid (x,y) \in R\}$$

によって定義される V の部分集合であった．同値類については次の命題が知られている．

命題 5.5. 集合 V 上の同値関係 R と V の元 x,y に対して以下が成り立つ．

1. $x \in [x]_R$,
2. $(x,y) \in R \iff [x]_R = [y]_R$,
3. $[x]_R \neq [y]_R \implies [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$

証明. 1. R は反射的なので $(x,x) \in R$．同値類の定義より，$x \in [x]_R$.
2. $z \in [x]_R$ であることと $(x,z) \in R$ であることは同値である．$(x,y) \in R$ ならば，R の対称性より $(y,x) \in R$ であり，R の推移性より $(y,z) \in R$ である．よって，$z \in [y]_R$ が成り立ち，$[x]_R \subseteq [y]_R$ が言える．$[y]_R \subseteq [x]_R$ も同様に示すことができる．逆に $[x]_R = [y]_R$ であると仮定すると，1 より $y \in [y]_R$ であり，仮定より $y \in [x]_R$ が言える．これは，$(x,y) \in R$ であることに他ならない．
3. $[x]_R \neq [y]_R$ ならば，2 より $(x,y) \notin R$ である．もしも，$[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ であるならば，$(x,z) \in R$ かつ $(y,z) \in R$ となるような z が存在し，R 対称律より $(z,y) \in R$ であり，さらに R の推移律より $(x,y) \in R$ となる．これは $(x,y) \notin R$ に矛盾する． □

集合 V を V 上の同値関係 R を用いて同値類に分割することを V の R による**類別**または**分類**という．同値類全体のなす集合

$$V/R = \{[x]_R \mid x \in V\}$$

を V の R による**商集合**という．

例 2.2 で考えた自然数の集合 $\{1,2,\cdots,7\}$ 上の関係「3 を法として合同」は同値関係である．ここで，$V=\{1,2,\cdots,7\}$ とし，$R=$「3 を法として合同」とすると，

$$V/R = \{\{1,4,7\},\{2,5\},\{3,6\}\}$$

である．実は，R を表す行列を上手に変換すると次のような行列を得る．

$$\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 6
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 3 & 6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|cc|cc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}$$

この行列は,「3 を法として合同」という同値関係によって与えられる分割の様子をよく表している．

同値関係は擬順序の特別な場合であるが，擬順序に含まれる最大の同値関係がいつも存在することが知られている．

命題 5.6. 集合 V 上の擬順序 R に対して，$R \cap R^{\mathsf{T}}$ は R に含まれる最大の同値関係である．

証明. $R \cap R^{\mathsf{T}}$ は明らかに R に含まれる．R は擬順序なので，$I \subseteq R$ であり，$I = I^{\mathsf{T}} \subseteq R^{\mathsf{T}}$ なので，$R \cap R^{\mathsf{T}}$ は反射的である．$(R \cap R^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = R^{\mathsf{T}} \cap R$ より，$R \cap R^{\mathsf{T}}$ は対称的である．

$$(R \cap R^{\mathsf{T}})(R \cap R^{\mathsf{T}}) \subseteq RR \cap R^{\mathsf{T}}R^{\mathsf{T}} = RR \cap (RR)^{\mathsf{T}} \subseteq R \cap R^{\mathsf{T}}$$

より，$R \cap R^{\mathsf{T}}$ は推移的である．以上により，$R \cap R^{\mathsf{T}}$ が R に含まれる同値関係であることが示された．次に $R \cap R^{\mathsf{T}}$ の最大性を示す．$K \subseteq R$ が同値関係ならば，$K = K^{\mathsf{T}} \subseteq R$ であるので，$K \subseteq R \cap R^{\mathsf{T}}$ となる．従って，$R \cap R^{\mathsf{T}}$ は R に含まれる最大の同値関係である．□

擬順序の他にも，順序という名前の付く概念がいくつかあるので，ここで思い出してみよう．

$$\begin{array}{rcl}
R : \text{半順序} & \Longleftrightarrow & R : \text{反射的かつ推移的かつ反対称的} \\
R : \text{強半順序} & \Longleftrightarrow & R : \text{推移的かつ非対称的} \\
R : \text{全順序} & \Longleftrightarrow & \begin{array}{l} R : \text{半順序かつ} \\ \quad \forall x, y.((x,y) \in R \text{ または } (y,x) \in R) \end{array} \\
R : \text{強全順序} & \Longleftrightarrow & \begin{array}{l} R : \text{強半順序かつ} \\ \quad \forall x, y.(x \neq y \implies \\ \qquad ((x,y) \in R \text{ または } (y,x) \in R)) \end{array}
\end{array}$$

半順序の典型的な例として挙げられるのが包含関係 $\subseteq$ であり，強い意味での包含関係 $\subsetneq$ は強半順序の例となっている．集合 $\{a, b\}$ の全ての部分集合

を集めたもの $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ の上の $\subseteq$ と $\subsetneq$ を行列で表すと次のようになる．

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \emptyset & \{a\} & \{b\} & \{a,b\} \end{array} \\
\begin{array}{c} \emptyset \\ \{a\} \\ \{b\} \\ \{a,b\} \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \subseteq
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} \emptyset & \{a\} & \{b\} & \{a,b\} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\subsetneq
\end{array}
$$

全順序の典型的な例として挙げられるのが数の大小関係 $\leq$ であり，強い意味での大小関係 $\lneq$ は強全順序の例となっている．自然数の集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ の上の $\leq$ と $\lneq$ を行列で表すと次のようになる．

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} &
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 & \leq
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\lneq
\end{array}
$$

これらの概念については，以下の性質が成り立つ．

命題 5.7. 集合 V 上の関係 R について次が成り立つ．

$$
\begin{array}{rcl}
R: \text{強半順序} & \Longleftrightarrow & R: \text{推移的かつ非反射的} \\
R: \text{全順序} & \Longleftrightarrow & R: \text{半順序かつ } L = R \cup R^{\mathsf{T}} \\
R: \text{強全順序} & \Longleftrightarrow & R: \text{強半順序かつ } \overline{I} = R \cup R^{\mathsf{T}}
\end{array}
$$

練習問題 4. 命題 *5.1*, *5.2*, *5.3*, *5.7* を証明せよ．

6　関係代数（まとめにかえて）

今後皆さんは，モノイドや群，環，体，束，ブール代数などの抽象的な代数について学ぶであろう．二項関係をこれらの代数のように取り扱う体系が知られているので，最後に紹介する．定義の中に知らない言葉がでてくると思うが，どれも後で必ず習うであろうから，ここでは，解説しない．もし興味がある人がいれば，個人的に聞きに来て欲しい．

定義 6.1 (Chin-Tarski [2]). 空でない集合 $\mathcal{R}$ と二項演算子 $\sqcup, \sqcap, ;$，単項演算子 ${}^{-}, {}^{\mathsf{T}}$，零項演算子 O, L, I の組 $(\mathcal{R}, \sqcup, \sqcap, {}^{-}, ;, {}^{\mathsf{T}}, O, L, I)$ で，以下を満たすものを関係代数と呼ぶ．

- $(\mathcal{R}, \sqcup, \sqcap, {}^{-}, O, L)$ は最大元 L と最小元 O を持つ完備かつ原子的なブール代数である．

- $(\mathcal{R}, ;, I)$ はモノイドである.
- *Schröder* 同値と *Tarski* 規則が成り立つ.

代数の言葉に慣れたころにもう一度関係について考える機会があったら，関係代数を使って二項関係のいろいろな性質について検証してみて欲しい.

参考文献

[1] Gunther Schmidt and Thomas Ströhlein. *Relations and Graphs - Discrete Mathematics for Computer Science* -. Springer-Verlag, 1993.

[2] Louise H. Chin, Alfred Tarski. Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras. University of California Publications in Mathematics, 1(9):341-384, 1951.